

1. Wstęp.

Znajomość stanu pracy SEE jest podstawowym zagadnieniem w sterowaniu pracą systemu na wszystkich etapach: projektowania, rozwoju, planowania stanów pracy oraz w czasie bieżącej eksploatacji. Kontrola rozptyłów mocy ma na celu:

- niedopuszczenie do przeciążeń elementów układów przesyłowych
- zapewnienie niezawodnego zasilania odbiorcy
- minimalizację strat sieciowych
- regulację napięć.

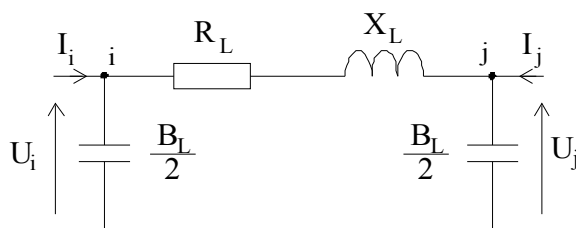
Ponadto obliczony rozptyw mocy w sieci przesyłowej jest podstawą do innych obliczeń takich jak stabilność lokalna i stabilność globalna.

Znajomość stanu SEE jest równoważna ze znajomością wektora stanu systemu, którym jest wektor modułów i kątów napięć we wszystkich węzłach sieci. W dalszej części referatu zajmę się klasyczną metodą wyznaczania rozptywu mocy wykorzystywaną do planowania pracy systemu oraz estymacją wektora stanu, która służy do jak najlepszego poznania stanu pracy SEE na podstawie nadmiarowego zbioru pomiarów mocy węzłowych i gałęziowych oraz napięć węzłowych.

Najpierw jednak chciałbym przypomnieć model matematyczny sieci czyli macierz admitancyjną oraz równania mocowo-napięciowe sieci.

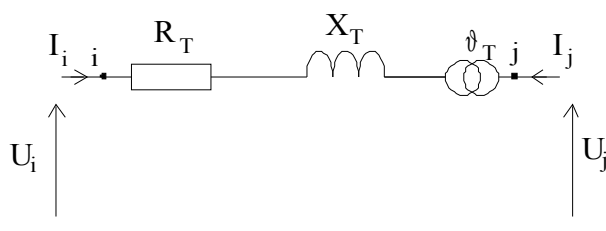
2. Macierz admitancyjna.

Podstawowymi elementami sieci przesyłowej są linie wysokich napięć (napowietrzne i kablowe) oraz transformatory. Dla tych elementów w analizie stanów ustalonych przyjmuje się schematy zastępcze jak na rysunkach poniżej oraz na ich podstawie tworzy się modele admitancyjne.



Rysunek 1. Schemat zastępczy linii przesyłowej.

$$\begin{bmatrix} I_p \\ I_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_L + jX_L} + j\frac{B_L}{2} & \frac{-1}{R_L + jX_L} \\ \frac{-1}{R_L + jX_L} & \frac{1}{R_L + jX_L} + j\frac{B_L}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_p \\ U_k \end{bmatrix} \quad (0)$$



Rysunek 2. Schemat zastępczy transformatora.

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_p \\ \underline{I}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_T + jX_T} & \frac{-1}{R_T + jX_T} \cdot \vartheta \\ \frac{-1}{R_T + jX_T} \cdot \vartheta & \frac{1}{R_T + jX_T} \cdot \vartheta^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_p \\ \underline{U}_k \end{bmatrix} \quad (0)$$

Ponieważ w normalnej pracy sieci napięcia i prądy w dowolnym punkcie sieci są przesunięte o 120° i równe co do modułu, zatem rozpatruje się tylko schematy i admitancje dla składowej zgodnej, pozostałe składowe: przeciwną i zerową pomija się.

Dla całej sieci można napisać równanie metody potencjałów węzłowych:

$$\underline{\mathbf{I}} = \underline{\mathbf{Y}} \cdot \underline{\mathbf{U}} \quad (0)$$

gdzie:

$\underline{\mathbf{I}}$ – wektor prądów węzłowych, tzn. prądów wstrzykiwanych do sieci i obieranych z sieci.

$\underline{\mathbf{U}}$ – wektor napięć węzłowych

$\underline{\mathbf{Y}}$ – macierz admitancyjna sieci.

Macierz admitancyjna sieci ma wymiar $N \times N$ (N - ilość węzłów sieci), i składa się z admitancji własnych i wzajemnych:

$$\underline{Y}_{ij} = G_{ij} + j \cdot B_{ij} = \begin{cases} -\frac{1}{\underline{Z}_{ij}} & \text{jeśli } i \neq j \text{ i istnieje bezpośrednie połączenie } i - j \\ \sum_{j \in N_i} \frac{1}{\underline{Z}_{ij}} + \frac{1}{\underline{Z}_{i0}} & \text{jeśli } i = j \\ 0 & \text{jeśli } i = j \text{ i nie istnieje bezpośrednie połączenie } i - j \end{cases} \quad (0)$$

przy czym $\underline{Z}_{ij}$, $\underline{Z}_{i0}$ – impedancje wzdłużne i poprzeczne linii i transformatorów, które mogą być przeniesione z macierzy admitancyjnych tych elementów.

Bazując na powyższym równaniu można wyprowadzić równania mocowo-napięciowe sieci. Moc węzła jest równa:

$$\underline{S}_i = \underline{U}_i \cdot \underline{I}_i^* \quad i = 1, 2, 3 \dots n \quad (0)$$

Z metody węzłowej wynika, że prąd w dowolnym węźle jest równy:

$$\underline{I}_i = \underline{Y}_{ii} \cdot \underline{U}_i + \sum_{j \in n_i} \underline{Y}_{ij} \cdot \underline{U}_j \quad (0)$$

Zatem moc w dowolnym węźle jest równa

$$\underline{S}_i = P_i + j \cdot Q_i = \underline{U}_i \cdot \underline{Y}_{ii}^* \cdot \underline{U}_i^* + \underline{U}_i \cdot \sum_{j \in n_i} \underline{Y}_{ij}^* \cdot \underline{U}_j^* \quad (0)$$

Należy zauważyć, że w powyższych równaniach moc jest równa mocy płynącej całą linią – trzema fazami, a napięcie równe napięciu międzyfazowemu. Dlatego też użyte we wzorach prądy są o pierwiastek z trzech większe od rzeczywiście płynących w fazach.

Podstawiając do tego równania napięcia w postaci biegunowej, a admitancje w postaci algebraicznej i rozdzielając to równanie na część rzeczywistą – moc czynną i część urojoną – moc bierną otrzymujemy podstawowe równania mocowo-napięciowe:

$$\begin{cases} P_i = U_i^2 \cdot G_{ii} + \sum_{\substack{j \in n_i \\ j \neq i}} U_i \cdot U_j \cdot (G_{ij} \cdot \cos(\delta_i - \delta_j) + B_{ij} \cdot \sin(\delta_i - \delta_j)) \\ Q_i = -U_i^2 \cdot B_{ii} + \sum_{\substack{j \in n_i \\ j \neq i}} U_i \cdot U_j \cdot (G_{ij} \cdot \sin(\delta_i - \delta_j) - B_{ij} \cdot \cos(\delta_i - \delta_j)) \end{cases} \quad (0)$$

Korzystając z tych równań można obliczyć moce węzłowe, natomiast aby obliczyć moce płynące gałęzią między węzłami i-j przy węźle i należy skorzystać z innej pary równań:

$$\begin{cases} P_{ij} = U_i^2 \cdot G_{ii} + U_i \cdot U_j \cdot [G_{ij} \cdot \cos(\delta_i - \delta_j) + B_{ij} \cdot \sin(\delta_i - \delta_j)] \\ Q_{ij} = -U_i^2 \cdot B_{ii} + U_i \cdot U_j \cdot [G_{ij} \cdot \sin(\delta_i - \delta_j) - B_{ij} \cdot \cos(\delta_i - \delta_j)] \end{cases} \quad (0)$$

3. Rozwinięcie w szereg Taylora.

Zanim jeszcze przejdę do metod obliczania rozptyłu, omówię sposób rozwiązywania układów nieliniowych, na którym bazuje klasyczna metoda rozwiązywania wyznaczania rozptyłu mocy, jak i estymacja wektora stanu.

Założmy, że mamy daną funkcję:

$$y(x) = 0 \quad (0)$$

Równanie nieliniowe zapisane w tej postaci można rozwinąć w otoczeniu pewnego punktu x_0 w szereg Taylora i pominąć człony większego stopnia:

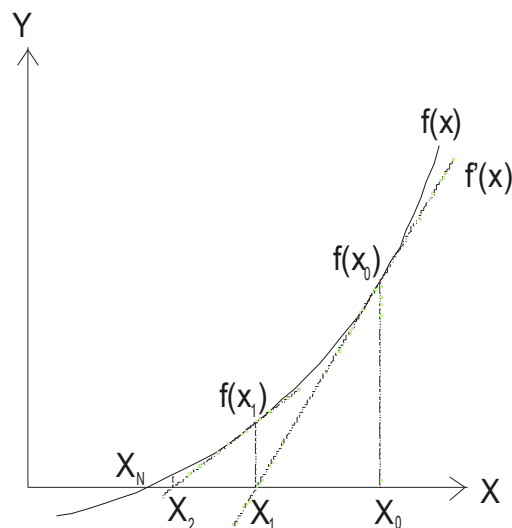
$$y(\Delta x) = y(x_0) + \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x_0} \cdot \Delta x = 0 \quad (0)$$

gdzie: $\Delta x = x_0 - x$

Można zatem wyznaczyć poprawkę Δx :

$$\Delta x = - \left(\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x_0} \right)^{-1} \cdot y(x_0) \quad (0)$$

Następnie wyznacza się zmienia się punkt początkowy o Δx i oblicza się wartość funkcji w tym punkcie. Jeżeli to rozwiązanie nas satysfakcjonuje, to kończymy rozwiązywanie równania, jeżeli nie, to powtarzamy wszystkie czynności. Sposób postępowania ilustruje poniższy rysunek:



Rysunek 3. Ilustracja graficzna metody Newtona.

Dla układu równań nieliniowych metoda postępowania jest taka sama, tylko zamiast 'Δx' i wartości funkcji mamy wektor przyrostów niewiadomych i wektor wartości funkcji, a zamiast pochodnej mamy macierz Jakobiego.

$$\Delta \mathbf{x} = - \left(\frac{d\mathbf{y}}{d\mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}_0} \right)^{-1} \cdot \mathbf{y}(\mathbf{x}_0) \Leftrightarrow \Delta \mathbf{X} = - \mathbf{J}^{-1} \Big|_{\mathbf{x}_0} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}_0) \quad (0)$$

4. Metoda Newtona-Raphsona

Przed przystąpieniem do obliczeń należy podzielić węzły sieci wg typów, które pokazuje poniższa tabela:

Typ węzła	Oznaczenie		U	δ	P	Q
węzeł odbiorczy	PQ	1	?	?	zadane	zadane
węzeł elektrowniany	PU	2	zadane	?	zadane	?
węzeł bilansujący	Bil.	4	zadane	zadane	?	?

Z równań mocowo-napięciowych wynika, że w każdym węźle występują cztery zmienne: P, Q, U oraz δ. Aby można było rozwiązać układ równań mocowo-napięciowych, musimy znać w każdym węźle dwie zmienne i poszukiwać pozostałych dwóch. W obliczeniach SEE poszukujemy wektora stanu – wektora modułów napięć i kątów fazowych. W niektórych węzłach znamy napięcia: w węzłach elektrownianych napięcie jest utrzymywane na stałym poziomie przez regulator napięcia. W tych węzłach znamy również moc czynną generowaną przez elektrownię. Zmiennymi są zaś kąt fazowy napięcia i moc bierna węzłowa. W węzłach odbiorowych, tzn. w węzłach, do których nie są przyłączone elektrownie, znamy zapotrzebowanie na moc czynną i bierną, poszukujemy zaś napięcia i kąta fazowego. Trzecim typem węzła jest węzeł bilansujący. Zazwyczaj jest jeden taki węzeł (choć może być ich kilka), i odpowiada on za pokrycie strat mocy w sieci, gdyż przed obliczeniami są one również niewiadome. Węzeł bilansujący najczęściej modeluje dużą elektrownię, znamy w nim moduł napięcia oraz jego kąt. Nie możemy wyznaczyć rzeczywistych kątów, gdyż są one zmienne w czasie z częstotliwością sieciową 50 Hz, możemy tylko wyznaczyć różnice między fazami napięć w węzłach. Musimy zatem ustalić kąt w jednym węźle, i zazwyczaj w węźle bilansującym przyjmujemy kąt fazowy napięcia równy zero..

Podstawą metody Newtona-Raphsona są równania mocowo-napięciowe węzła (0).

Ten układ wielu równań rozwija się w szereg Taylora, pomija człony wyższego, w miejsce modułów i kątów fazowych napięć wprowadza się przyrosty.

$$\begin{cases} \Delta P_i(U, \delta) = \frac{\partial P_i}{\partial \delta_i} \Delta \delta_i + \sum_{j \in n_i} \frac{\partial P_i}{\partial \delta_j} \Delta \delta_j + \frac{\partial P_i}{\partial U_i} \Delta U_i + \sum_{j \in n_i} \frac{\partial P_i}{\partial U_j} \Delta U_j \\ \Delta Q_i(U, \delta) = \frac{\partial Q_i}{\partial \delta_i} \Delta \delta_i + \sum_{j \in n_i} \frac{\partial Q_i}{\partial \delta_j} \Delta \delta_j + \frac{\partial Q_i}{\partial U_i} \Delta U_i + \sum_{j \in n_i} \frac{\partial Q_i}{\partial U_j} \Delta U_j \end{cases} \quad (0)$$

Po lewej stronie równania znajdują się różnice między mocą zadaną, a obliczoną z równań mocowo-napięciowych. Napięcia i kąty w tych równaniach są równe napięciom i kątom z poprzedniego kroku.

Niewiadomych w wektorze stanu jest $n-1$ kątów (n – liczba wszystkich węzłów) oraz L napięć (L – liczba węzłów odbiorowych). W pozostałych węzłach znamy kąty i napięcia. Zatem dla sieci można napisać równanie przyrostów kątów i napięć w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} \Delta P_1 \\ \vdots \\ \Delta P_{n-1} \\ \Delta Q_1 \\ \vdots \\ \Delta Q_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_i}{\partial \delta_j} & \frac{\partial P_i}{\partial U_j} \\ \frac{\partial Q_i}{\partial \delta_j} & \frac{\partial Q_i}{\partial U_j} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \delta_1 \\ \vdots \\ \Delta \delta_{n-1} \\ \Delta U_1 \\ \vdots \\ \Delta U_L \end{bmatrix} \quad ()$$

Elementy macierzy Jakobiego oblicza się z następujących wzorów:

$$\frac{\partial P_i}{\partial \delta_j} = U_i \cdot U_j \cdot [G_{ij} \cdot \sin(\delta_i - \delta_j) - B_{ij} \cdot \cos(\delta_i - \delta_j)] \quad i \neq j \quad (0)$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial \delta_i} = - \sum_{j \in n_i} U_i \cdot U_j \cdot [G_{ij} \cdot \sin(\delta_i - \delta_j) - B_{ij} \cdot \cos(\delta_i - \delta_j)] \quad (0)$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial U_j} = U_i \cdot [G_{ij} \cdot \cos(\delta_i - \delta_j) + B_{ij} \cdot \sin(\delta_i - \delta_j)] \quad i \neq j \quad (0)$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial U_i} = 2 \cdot U_i \cdot G_{ii} + \sum_{j \in n_i} U_j \cdot [G_{ij} \cdot \cos(\delta_i - \delta_j) + B_{ij} \cdot \sin(\delta_i - \delta_j)] \quad (0)$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial \delta_j} = -U_i \cdot U_j \cdot [G_{ij} \cdot \cos(\delta_i - \delta_j) + B_{ij} \cdot \sin(\delta_i - \delta_j)] \quad i \neq j \quad (0)$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial \delta_i} = \sum_{j \in n_i} U_i \cdot U_j \cdot [G_{ij} \cdot \cos(\delta_i - \delta_j) + B_{ij} \cdot \sin(\delta_i - \delta_j)] \quad (0)$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial U_j} = U_i \cdot [G_{ij} \cdot \sin(\delta_i - \delta_j) - B_{ij} \cdot \cos(\delta_i - \delta_j)] \quad i \neq j \quad (0)$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial U_i} = -2 \cdot U_i \cdot B_{ii} + \sum_{j \in n_i} U_j \cdot [G_{ij} \cdot \sin(\delta_i - \delta_j) - B_{ij} \cdot \cos(\delta_i - \delta_j)] \quad (0)$$

Algorytm metody Newtona–Raphsona wygląda następująco:

1. Numeruje się węzły sieci w kolejności: węzły odbiorcze, elektrowniane oraz bilansujący. Przyjmuje się zerowy wektor stanu (np. moduły napięć równe napięciom znamionowym, kąty równe zero).
2. Oblicza się macierz Jakobiego z wcześniej przytoczonych wzorów.
3. Oblicza się niezbilansowanie mocy w węzłach sieci – różnice między mocą zadaną, a obliczoną z przyjętych napięć i kątów
4. Jeżeli obliczone niezbilansowanie mocy we wszystkich węzłach są mniejsze od zadanej dokładności, to kończy się obliczenia iteracyjne. W przeciwnym razie przechodzi się do punktu następnego.
5. Rozwiązuje się liniowy układ równań
6. Koryguje się wartości napięć węzłowych
7. Powrót do punktu 2.

5. Estymacja wektora stanu.

Sterowanie dużym i złożonym obiektem jakim jest system elektroenergetyczny wymaga dysponowania precyzyjnym informacjami o stanie pracy systemu. Złożoność obiektu, a więc złożoność i masowość pomiarów przekraczają zdolności poznawcze człowieka, dlatego też analizę danych powierza się komputerom. Komputer może dokonać niezbędnych obliczeń, sprawdzić, czy nie ma przekroczeń, a wyniki przedstawić na schematach.

Estymator wektora stanu zajmuje się odtworzeniem najbardziej prawdopodobnego stanu pracy – najczęściej w postaci wektora stanu tzn. napięć węzłowych – na podstawie nadmiarowego zbioru pomiarów i znanej topologii sieci. Zbiór pomiarów składa się z pomiarów mocy czynnej i biernej węzłowej, przepływu mocy w gałęzi na obu jej końcach oraz modułu napięcia w węzłach. Oczywiście nie każdy węzeł i nie każda gałąź jest wyposażona w mierniki.

Estymacji stanu towarzyszą inne algorytmy, bez których sama estymacja nie spełnia swojego zadania. Tymi algorytmami są:

Analiza topologii – na jej podstawie tworzona jest macierz admitancyjna sieci.

Wstępna weryfikacja danych ma na celu wychwycenie pomiarów obarczonych ewidentnym błędem.

Test obserwowalności – daje odpowiedź, czy dany zbiór pomiarów jest wystarczający pod względem liczby i rozmieszczenia do poprawnego obliczenia estymacji pracy systemu.

Estymator stanu.

Detekcja i identyfikacja błędnych danych – jej celem jest wykrycie pomiarów obarczonych dużymi błędami, aby nie zakłócały one obliczeń. Analiza ta daje wyniki tylko wtedy, kiedy w mamy do czynienia z kilkoma pomiarami obciążonymi dużymi błędami.

Później znowu należy przeprowadzić estymację wektora stanu.

Na końcu oblicza się brakujące wielkości, po czym otrzymuje się estymowany wektor stanu.

Estymacja wektora stanu polega, jak już wspomniałem, na jak najlepszym oszacowaniu wektora stanu na podstawie nadmiarowego zbioru pomiarów. Ponadto każdy pomiar obarczony jest pewnym błędem. Pomiary są związane z wektorem stanu następującą zależnością:

$$\mathbf{z} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{v} \quad (0)$$

gdzie: $\mathbf{z}$ – wektor pomiarów, $\mathbf{x}$ – wektor stanu, $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ – nieliniowa funkcja łącząca wektor stanu i wektor pomiarów, w naszym przypadku są to między innymi równania mocowo-napięciowe sieci.

Poszukiwać będziemy wektora odpowiadającego wektorowi stanu, który będzie minimalizował pewną funkcję kryterialną. Taką funkcją kryterialną jest w moim przypadku suma kwadratów błędów, czyli różnicy wielkości pomiaru i obliczonej wielkości z estymowanego wektora stanu.

$$J(\mathbf{x}) = \sum_i \mathbf{v}_i^2 = \sum_i (\mathbf{z}_i - \mathbf{h}_i(\mathbf{x}))^2 = \min \quad (0)$$

W zapisie macierzowym funkcja kryterialna wygląda następująco:

$$J(\mathbf{x}) = [\mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{x})]^T \cdot [\mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{x})] = \min \quad (0)$$

Minimum wartości funkcji można znaleźć przyrównując pierwszą pochodną do zera:

$$\min(J(\mathbf{x})) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial J(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \nabla J(\mathbf{x}) = 0 \quad (0)$$

Wyznaczając różniczkę zupełną funkcji kryterialnej otrzymujemy nieliniowy układ równań:

$$\nabla J(\mathbf{x}) = -2\mathbf{H}^T(\mathbf{x}) \cdot [\mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{x})] = 0 \quad (0)$$

gdzie $\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$ - macierz Jakobiego funkcji $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ liczona w danym punkcie $\mathbf{x}$.

Równanie to jest nieliniowe, ponieważ nieliniowa jest funkcja $\mathbf{h}(\mathbf{x})$. Równanie to można rozwiązać iteracyjnie, korzystając z metody Newtona. Rozwija się funkcję $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ w szereg Taylora, pomija wyrazy wyższego rzędu i wprowadza indeks iteracji. Po tych zabiegach ostatecznie otrzymuje się następujący algorytm estymacji:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \left[\mathbf{H}^T(\mathbf{x}^{(k)}) \cdot \mathbf{H}(\mathbf{x}^{(k)}) \right]^{-1} \cdot \mathbf{H}^T(\mathbf{x}^{(k)}) \cdot [\mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{x})] \quad (0)$$

Wektor stanu w kroku następnym jest równy wektorowi stanu z kroku poprzedniego plus poprawka obliczana tym wzorem. „ $\mathbf{z}-\mathbf{h}(\mathbf{x})$ ” jest to wektor różnic między wartościami z pomiarów a obliczonymi wielkościami na podstawie równań m0cowo-napięciowych. $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ jest to macierz Jakobiego o liczbie wierszy równej liczbie pomiarów, a liczbie kolumn równej $2N - 1$ czyli liczbie węzłów razy dwa minus jeden – węzeł bilansujący.

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_{wz}}{\partial \delta_j} & \frac{\partial P_{wz}}{\partial U_j} \\ \frac{\partial Q_{wz}}{\partial \delta_j} & \frac{\partial Q_{wz}}{\partial U_j} \\ \frac{\partial P_{gl}}{\partial \delta_j} & \frac{\partial P_{gl}}{\partial U_j} \\ \frac{\partial Q_{gl}}{\partial \delta_j} & \frac{\partial Q_{gl}}{\partial U_j} \\ \frac{\partial U_{wz}}{\partial \delta_j} & \frac{\partial U_{wz}}{\partial U_j} \end{bmatrix} \quad (0)$$

Poszczególne elementy macierzy Jakobiego możemy w prosty sposób obliczyć.

Pochodne mocy węzłowych po kątach i modułach napięć (są to takie same wzory jak w metodzie Newtona-Raphsona rozptywu mocy).

$$\frac{\partial P_i}{\partial \delta_j} = U_i \cdot U_j \cdot [G_{ij} \cdot \sin(\delta_i - \delta_j) - B_{ij} \cdot \cos(\delta_i - \delta_j)] \quad i \neq j \quad (0)$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial \delta_i} = - \sum_{j \in n_i} U_i \cdot U_j \cdot [G_{ij} \cdot \sin(\delta_i - \delta_j) - B_{ij} \cdot \cos(\delta_i - \delta_j)] \quad (0)$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial U_j} = U_i \cdot [G_{ij} \cdot \cos(\delta_i - \delta_j) + B_{ij} \cdot \sin(\delta_i - \delta_j)] \quad i \neq j \quad (0)$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial U_i} = 2 \cdot U_i \cdot G_{ii} + \sum_{j \in n_i} U_j \cdot [G_{ij} \cdot \cos(\delta_i - \delta_j) + B_{ij} \cdot \sin(\delta_i - \delta_j)] \quad (0)$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial \delta_j} = -U_i \cdot U_j \cdot [G_{ij} \cdot \cos(\delta_i - \delta_j) + B_{ij} \cdot \sin(\delta_i - \delta_j)] \quad i \neq j \quad (0)$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial \delta_i} = \sum_{j \in n_i} U_i \cdot U_j \cdot [G_{ij} \cdot \cos(\delta_i - \delta_j) + B_{ij} \cdot \sin(\delta_i - \delta_j)] \quad (0)$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial U_j} = U_i \cdot [G_{ij} \cdot \sin(\delta_i - \delta_j) - B_{ij} \cdot \cos(\delta_i - \delta_j)] \quad i \neq j \quad (0)$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial U_i} = -2 \cdot U_i \cdot B_{ii} + \sum_{j \in n_i} U_j \cdot [G_{ij} \cdot \sin(\delta_i - \delta_j) - B_{ij} \cdot \cos(\delta_i - \delta_j)] \quad (0)$$

Pochodne mocy gałęziowych po modułach i kątach napięć.

$$\frac{\partial P_{ij}}{\partial \delta_i} = -U_i \cdot U_j \cdot [G_{ij} \cdot \sin(\delta_i - \delta_j) - B_{ij} \cdot \cos(\delta_i - \delta_j)] \quad i - \text{początek gałęzi} \quad (0)$$

$$\frac{\partial P_{ij}}{\partial \delta_j} = U_i \cdot U_j \cdot [G_{ij} \cdot \sin(\delta_i - \delta_j) - B_{ij} \cdot \cos(\delta_i - \delta_j)] \quad j - \text{koniec gałęzi} \quad (0)$$

$$\frac{\partial P_{ij}}{\partial U_i} = 2 \cdot U_i \cdot G_{ii} + U_j [G_{ij} \cdot \cos(\delta_i - \delta_j) + B_{ij} \cdot \sin(\delta_i - \delta_j)] \quad (0)$$

$$\frac{\partial P_{ij}}{\partial U_j} = U_i [G_{ij} \cdot \cos(\delta_i - \delta_j) + B_{ij} \cdot \sin(\delta_i - \delta_j)] \quad (0)$$

Pozostałe pochodne mocy czynnych gałęziowych równe są zeru.

$$\frac{\partial Q_{ij}}{\partial \delta_i} = U_i \cdot U_j \cdot [G_{ij} \cdot \cos(\delta_i - \delta_j) + B_{ij} \cdot \sin(\delta_i - \delta_j)] \quad i - \text{początek gałęzi} \quad (0)$$

$$\frac{\partial Q_{ij}}{\partial \delta_j} = -U_i \cdot U_j \cdot [G_{ij} \cdot \cos(\delta_i - \delta_j) + B_{ij} \cdot \sin(\delta_i - \delta_j)] \quad j - \text{koniec gałęzi} \quad (0)$$

$$\frac{\partial Q_{ij}}{\partial U_i} = -2 \cdot U_i \cdot G_{ii} + U_j [G_{ij} \cdot \sin(\delta_i - \delta_j) - B_{ij} \cdot \cos(\delta_i - \delta_j)] \quad (0)$$

$$\frac{\partial Q_{ij}}{\partial U_j} = U_i [G_{ij} \cdot \sin(\delta_i - \delta_j) - B_{ij} \cdot \cos(\delta_i - \delta_j)] \quad (0)$$

Pozostałe pochodne mocy czynnych gałęziowych równe są zeru.

$$\frac{\partial U_i}{\partial \delta_j} = 0; \quad \frac{\partial U_i}{\partial \delta_i} = 0 \quad (0)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial U_j} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (0)$$

Algorytm estymacji metodą najmniejszych kwadratów wygląda następująco:

1. Dane: topologia systemu i jego parametry.
2. Dane: wektor pomiarów.
3. Przyjęcie początkowego wektora stanu czyli początkowych modułów i kątów napięć.
4. Wyznaczenie niezbilansowań wielkości mierzonych z-y(x)
5. Obliczenie macierzy Jakobiego
6. Obliczenie przyrostów modułów i kątów napięć
7. Wyznaczenie największych przyrostów.
8. Jeśli są one mniejsze od zadanej dokładności, to otrzymaliśmy estymowany wektor stanu.
Jeśli nie to przechodzimy dalej
9. Dodajemy wektor przyrostów do wektora stanu.
10. Powrót do punktu czwartego.