Rozdział 2

Przegląd metod odtwarzania prędkości kątowej wirnika silnika indukcyjnego

2.1. Bezpośrednie wyznaczanie z równań stanu

Najstarsze historycznie metody odtwarzania prędkości kątowej wirnika silnika indukcyjnego polegają na jej bezpośrednim wyznaczaniu z równań stanu. Zakładając szereg uproszczeń i wprowadzając pojęcie wektora przestrzennego, trójfazowy silnik klatkowy możemy opisać w spoczywającym układzie współrzędnych prostokątnych $\alpha\beta$ związanym ze stojanem, zestawem pięciu równań [17, 18]:

$$\begin{aligned}
\underline{u}_s &= R_s \underline{i}_s + \frac{d}{dt}\underline{\psi}_s \\
0 &= R_r \underline{i}_r + \frac{d}{dt}\underline{\psi}_r - j p_b \omega_m \underline{\psi}_r \\
\underline{\psi}_s &= L_s \underline{i}_s + L_m \underline{i}_r \\
\underline{\psi}_r &= L_r \underline{i}_r + L_m \underline{i}_s \\
\frac{d}{dt}\omega_m &= \frac{1}{J}\left[-\frac{3}{2} p_b L_m \Im\left(\underline{i}_s^* \underline{i}_r\right) - M_z\right],
\end{aligned} \tag{2.1}$$

gdzie: $\underline{u}_s$ - wektor przestrzenny napięcia stojana, $\underline{i}_s$, $\underline{i}_r$ - wektory przestrzenne prądów stojana i wirnika, $\underline{\psi}_s$, $\underline{\psi}_r$ - wektory przestrzenne strumieni stojana i wirnika, R_s, R_r, L_s, L_r, L_m - odpowiednio rezystancje i indukcyjności stojana i wirnika oraz indukcyjność główna (magnesowania), p_b - liczba par biegunów, ω_m - prędkość kątowa wirnika, M_z - moment obciążający. Iloczyn $p_b\omega_m$ nazywany jest elektryczną prędkością kątową wirnika [19]. Prędkość wirnika związana jest z pulsacją poślizgu zależnością

$$\omega_m = \frac{\omega_{\psi s} - \omega_{sl}}{p_b}, \tag{2.2}$$

przy czym $\omega_{\psi s}$ jest prędkością kątową strumienia stojana, ω_{sl} - pulsacją poślizgu. Wprowadzając wirujący układ współrzędnych prostokątnych xy związany ze strumieniem stojana, otrzymujemy po odpowiednich przekształceniach zależność [17, 18]:

$$\omega_{sl} = \frac{L_s\left(i_{sy} + \sigma\tau_r \frac{di_{sy}}{dt}\right)}{\tau_r\left(\psi_{sx} - \sigma L_s i_{sx}\right)}, \tag{2.3}$$

w której $\sigma = 1 - \frac{L_m^2}{L_s L_r}$, $\tau_r = \frac{L_r}{R_r}$ oraz i_{sx}, i_{sy}, ψ_{sx} - składowe prądu i strumienia stojana w wirującym układzie współrzędnych ($\psi_{sy} = 0$). Z kolei prędkość wirowania układu współrzędnych otrzymujemy ze wzoru

$$\begin{aligned}\omega_{\psi s} &= \frac{d}{dt}\arctan\left(\frac{\psi_{s\beta}}{\psi_{s\alpha}}\right) = \\ &= \frac{\left(u_{s\beta} - R_s i_{s\beta}\right)\psi_{s\alpha} - \left(u_{s\alpha} - R_s i_{s\alpha}\right)\psi_{s\beta}}{\psi_{s\alpha}^2 + \psi_{s\beta}^2}.\end{aligned} \tag{2.4}$$

Istnieje wiele analogicznych rozwiązań bezpośredniego wyznaczania prędkości. Opis większości z nich zawarto w [18]. Przykładowo w [20, 21] lub [17] znajdziemy schemat estymacji oparty o poślizg względem strumienia wirnika. W rozwiązaniu tym mamy

$$\omega_m = \frac{1}{p_b}\cdot\frac{1}{\psi_{r\alpha}^2 + \psi_{r\beta}^2}\left[\left(\psi_{r\alpha}\dot{\psi}_{r\beta} - \dot{\psi}_{r\alpha}\psi_{r\beta}\right) - \frac{L_m}{\tau_r}\left(\psi_{r\alpha} i_{s\beta} - \psi_{r\beta} i_{s\alpha}\right)\right]. \tag{2.5}$$

Do tej rodziny rozwiązań należy również zaliczyć tzw. pseudoinwersję [22]. Na podstawie równań (2.1) otrzymujemy zależność

$$\underline{a}(t)\omega_m(t) = \underline{b}(t), \tag{2.6}$$

w której

$$\underline{a}(t) = jp_b\sigma\underline{i}_s(t) - jp\frac{1}{L_s}\underline{\psi}_s(t) \tag{2.7}$$

oraz

$$\underline{b}(t) = -\frac{1}{L_s}\underline{u}_s(t) + \left(\frac{R_s}{L_s} + \frac{1}{\tau_r}\right)\underline{i}_s(t) + \sigma\frac{d}{dt}\underline{i}_s(t) - \frac{1}{\tau_r L_s}\underline{\psi}_s(t). \tag{2.8}$$

Równanie liniowe (2.6) posiada zespolone współczynniki $\underline{a}(t), \underline{b}(t) \in \mathbb{C}$. Jakakolwiek niedokładność w wyznaczeniu tych współczynników może spowodować, że obliczona prędkość nie będzie liczbą rzeczywistą. Dlatego też równanie to należy rozbić na układ dwóch równań uzyskanych z porównania odpowiednio części rzeczywistych i urojonych przy założeniu $\omega_m(t) \in \mathbb{R}$. Otrzymujemy

$$\begin{cases}\Re\left(\underline{a}(t)\right)\omega_m(t) = \Re\left(\underline{b}(t)\right)\\ \Im\left(\underline{a}(t)\right)\omega_m(t) = \Im\left(\underline{b}(t)\right)\end{cases}. \tag{2.9}$$

Niestety dla przebiegów sinusoidalnych współczynniki $\Re\left(\underline{a}(t)\right)$, $\Im\left(\underline{a}(t)\right)$, $\Re\left(\underline{b}(t)\right)$ i $\Im\left(\underline{b}(t)\right)$ przyjmują okresowo wartości zerowe (lub bliskie zeru), co uniemożliwia wiarygodne wyznaczenie prędkości $\omega_m(t)$ w oparciu o pojedyncze równanie. Układ (2.9) jest układem nadokreślonym i należy go rozwiązać w sensie najmniejszych kwadratów [15], tj. dla

$$\boldsymbol{A}\omega_m = \boldsymbol{B} \tag{2.10}$$

wykonujemy lewostronne mnożenie przez transponowaną macierz układu

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\omega_m = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B} \tag{2.11}$$

i otrzymujemy

$$\omega_m = \left(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}\right). \tag{2.12}$$

Dodatkowe wygładzenie estymaty uzyskujemy poprzez rozszerzenie układu do postaci

$$\left\{\begin{array}{c} \Re\left(\underline{a}(t)\right)\omega_m(t') = \Re\left(\underline{b}(t)\right) \\ \Re\left(\underline{a}(t-h)\right)\omega_m(t') = \Re\left(\underline{b}(t-h)\right) \\ \cdots \\ \Re\left(\underline{a}(t-nh)\right)\omega_m(t') = \Re\left(\underline{b}(t-nh)\right) \\ \Im\left(\underline{a}(t)\right)\omega_m(t') = \Im\left(\underline{b}(t)\right) \\ \Im\left(\underline{a}(t-h)\right)\omega_m(t') = \Im\left(\underline{b}(t-h)\right) \\ \cdots \\ \Im\left(\underline{a}(t-nh)\right)\omega_m(t') = \Im\left(\underline{b}(t-nh)\right) \end{array}\right. , \tag{2.13}$$

gdzie h jest okresem próbkowania, natomiast $t' \in [t-nh, t] \wedge n \in \mathbb{N}$. Do wyznaczenia prędkości zgodnie z (2.12) można wykorzystać dowolny podzbiór równań układu (2.13). Niemniej jednak każdy podzbiór inny niż (2.9) wprowadza dodatkowe opóźnienie.

Omówione w tym podrozdziale rozwiązania określane są często mianem symulatorów lub estymatorów z otwartą pętlą sprzężenia zwrotnego (*ang.* open-loop estimators). Oznacza to, że w swej strukturze nie wykorzystują żadnych algorytmów korekcji estymaty. Są przez to bardzo wrażliwe na niedokładności w określeniu parametrów silnika oraz zmiany tych parametrów w trakcie pracy napędu. Można je stosować w zasadzie wyłącznie w obecności algorytmów adaptacji parametrów silnika. Dodatkowo wymagają one wyznaczenia odpowiednich strumieni, co wiąże się z wykonaniem obliczeń zgodnie z zależnościami

$$\left\{\begin{array}{c} \psi_{s\alpha} = \psi_{s\alpha}(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t}\left(u_{s\alpha} - R_s i_{s\alpha}\right)dt \\ \psi_{s\beta} = \psi_{s\beta}(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t}\left(u_{s\beta} - R_s i_{s\beta}\right)dt \\ \psi_{r\alpha} = \frac{L_r}{L_m}\left(\psi_{s\alpha} - \sigma L_s i_{s\alpha}\right) \\ \psi_{r\beta} = \frac{L_r}{L_m}\left(\psi_{s\beta} - \sigma L_s i_{s\beta}\right) \end{array}\right. . \tag{2.14}$$

Należy zatem rozwiązać problem warunków początkowych i składowej stałej związany z całkowaniem. Zagadnienia te zostaną opisane w kolejnym rozdziale dotyczącym odtwarzania strumienia stojana.

Oryginalną analizę zagadnienia odtwarzania prędkości można znaleźć w [23]. Model silnika (2.1) zastąpiono zestawem modeli mechanicznych i przy ich użyciu zilustrowano wybrane metody wyznaczania prędkości kątowej wirnika.