



opracował: prof. dr hab. inż. Józef Paska, mgr inż. Piotr Marchel

Ćwiczenie nr 4. Wykorzystanie metod procesów Markowa i semi-Markowa w analizie niezawodności elementów i systemów

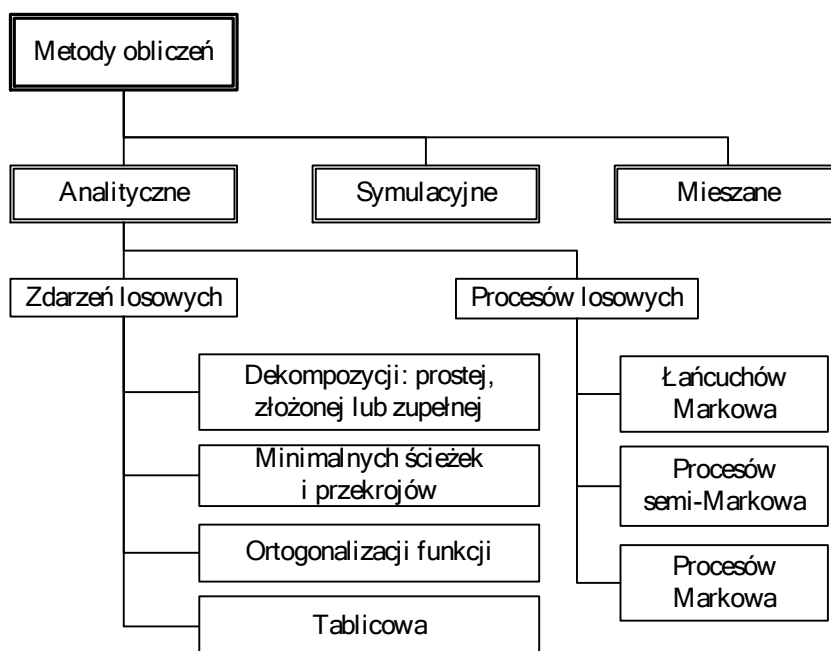
1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest poznanie metod procesów Markowa i semi-Markowa w analizie niezawodności oraz nabycie umiejętności ich wykorzystania do obliczeń niezawodności elementów i systemów.

2. Wprowadzenie

a) Podział metod obliczeniowych

W przypadku systemów o złożonej strukturze niezawodnościowej istnieje wiele metod obliczeń wskaźników niezawodności, różniących się pomiędzy sobą dokładnością i czasem obliczeń. Można je podzielić na trzy podstawowe grupy: analityczne, w których zdarzenia lub procesy losowe poddawane są analizie; symulacyjne, w których zdarzenia lub procesy losowe są symulowane oraz mieszane, w których wykorzystuje się oba wyżej wymienione podejścia. Szczegółowy podział metod obliczeń niezawodnościowych został przedstawiony na rys. 1.



Rys. 1. Podział metod obliczeń niezawodnościowych

b) Metody procesów Markowa i semi-Markowa

Wśród metod analitycznych opartych na analizie procesów losowych (zwanych też metodami przestrzeni stanów) do najczęściej stosowanych należą **metody łańcuchów i procesów Markowa** a ostatnio procesów semi-Markowa. Bazują one na przyjęciu za model niezawodnościowy badanego obiektu procesu losowego spełniającego własność Markowa. Ich stosowanie wymaga jednak spełnienia pewnych założeń.

I tak w przypadku metody procesów Markowa rozkłady prawdopodobieństw czasów przebywania w stanach muszą być wykładnicze. Wyjątek stanowią obliczenia wartości asymptotycznych wskaźników niezawodności. W niektórych przypadkach istnieje również możliwość takiego przekształcenia przestrzeni stanów by niewykładnicze rozkłady prawdopodobieństw zastąpić ciągiem rozkładów wykładniczych.

Metoda łańcuchów Markowa może być stosowana przy założeniu, że proces zmiany stanów jest pierwszego rzędu.

W procesach semi-Markowa rozkłady prawdopodobieństw mogą być dowolne, lecz większa uniwersalność metody wymaga zastosowania bardziej złożonego aparatu matematycznego.

Proces losowy jest to rodzina zmiennych losowych określonych na wspólnej przestrzeni probabilistycznej (V, F, P) , przyporządkowanych poszczególnym elementom pewnego zbioru T . Zbiór T może być interpretowany jako zbiór chwil i wówczas używa się także dla procesu losowego określenia proces stochastyczny.

Można zatem proces losowy określić jako mierzalną ze względu na ciało F – funkcję:

$$X : V \times T \rightarrow S \subset R \quad (1)$$

Zbiór S wartości przyjmowanych przez proces nazywa się **zbiorem stanów** procesu, sam zaś proces zapisuje się zwykle w postaci: $\{X(t), t \in T\}$

Tablica 1. Klasyfikacja procesów losowych

Zbiór T	Zbiór stanów S	
	Co najwyżej przeliczalny (dyskretny)	Przedział (ciągły)
Co najwyżej przeliczalny (dyskretny)	Łańcuch losowy	Ciąg (szereg) losowy
Przedział (ciągły)	Punktowy proces losowy (o dyskretniej przestrzeni stanów)	Proces losowy z czasem ciągłym

Wyobraźmy sobie, że informacja I , jaką mamy o przebiegu procesu $X(t)$, składa się z informacji I^* , że w chwili t_0 było $X(t_0) = x$, oraz z informacji I^{**} dotyczącej tego, co się działo w chwilach wcześniejszych od t_0 . Jeżeli przy posiadaniu informacji I^* informacje I^{**} są zbędne dla wyznaczenia rozkładu zmiennej losowej $X(t_0 + \tau)$ dla chwil późniejszych ($\tau > 0$), to proces nazywamy **procesem Markowa**.

Tak więc mamy:

$$P\{X(t_0 + \tau) < y | I^* \text{ i } I^{**}\} = P\{X(t_0 + \tau) < y | I^*\} = P\{X(t_0 + \tau) < y | X(t_0) = x\} \quad (2)$$

Bardziej sformalizowana definicja procesu Markowa jest następująca. Proces losowy $\{X(t_0 + \tau), t \in T\}$ nazywa się procesem Markowa, gdy dla dowolnego skończonego ciągu

chwil

$t_1 < t_2 < \dots < t_n$ ($t_1, t_2, \dots, t_n \in T$) i dowolnych liczb rzeczywistych $x_1, x_2, \dots, x_n$ zachodzi równość:

$$\begin{aligned} P[X(t_n) < x_n | X(t_{n-1}) = x_{n-1}, X(t_{n-2}) = x_{n-2}, \dots, X(t_1) = x_1] = \\ = P[X(t_n) = x_n | X(t_{n-1}) = x_{n-1}] \end{aligned} \quad (3)$$

Zależność powyższa oznacza, że warunkowy rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej $X(t_n)$ zależy wyłącznie od rozkładu prawdopodobieństwa jednej ze zmiennych losowych $X(t_{n-1})$. Właściwości procesu Markowa w chwili t_n nie zależą od wartości, jakie proces przyjmował w chwilach $t_1, t_2, \dots, t_{n-2}$. Proces Markowa jest więc w pełni scharakteryzowany przez dystrybuantę warunkową:

$$F(s, t, x, y) = P[X(t) < x | X(s) = y], \quad s < t \quad (4)$$

albo też łączną dystrybuantę wektora losowego $(X(s), X(t))$ wraz z dystrybuantą „początkową” $F(s, y) = P[X(s) < y]$.

W analizie procesów Markowa zasadniczą rolę odgrywa funkcja zwana **prawdopodobieństwem przejścia**, która jest określona dla dowolnych chwil s i t ($s < t$; $s, t \in T$) oraz dla dowolnej liczby rzeczywistej y i dowolnego zbioru borelowskiego B , w następujący sposób:

$$P(s, t, B, y) = P[X(t) \in B | X(s) = y] \quad (5)$$

Proces Markowa $\{X(t), t \in T\}$ jest jednorodny, gdy dla dowolnych $s, t \in T$ ($s < t$) prawdopodobieństwa przejścia zależą tylko od różnicy $t - s = \tau$, tzn.:

$$P(s, t, B, y) = P(\tau, B, y) \quad (6)$$

W zastosowaniach praktycznych, w szczególności w zagadnieniach niezawodnościowych, najistotniejszą rolę odgrywają **punktowe procesy Markowa** określone na przedziale $T = [t_0, \infty)$ z przestrzenią stanów $S = \{0, 1, 2, \dots\}$. Realizacje punktowego procesu Markowa są funkcjami przedziałami stałymi, a ich wykresy są liniami schodkowymi.

Dla punktowego procesu Markowa prawdopodobieństwa przejścia

$$p_{ij}(s, t) = P[X(t) = j | X(s) = i], \quad t \geq s, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots \quad (7)$$

spełniają związki:

$$p_{ij}(s, t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}(s, t_1) p_{kj}(t_1, t_2), \quad (s < t_1 < t) \quad (8)$$

zwane równaniami **Smoluchowskiego – Chapmana – Kolmogorowa**.

Ponadto dla każdego i ($i = 0, 1, 2, \dots$) zachodzi równość:

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}(s, t) = 1 \quad (9)$$

Wprowadzając funkcje $\lambda_{ij}(t)$ zwane **intensywnościami przejścia procesu**

$$\lambda_{ij}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} p_{ij}(t, t + \Delta t), \quad i, j = 0, 1, 2, \dots, i \neq j \quad (10)$$

uzyskuje się układ równań różniczkowych o zmiennych współczynnikach:

$$\bigwedge_{i \in S} \frac{dP_i}{dt} = \lambda_{ii}(t)P_i(t) + \sum_{\substack{j \in S \\ i \neq j}} \lambda_{ji}(t)P_j(t) \quad (11)$$

przy czym:

$$\lambda_{ii}(t) = - \sum_{\substack{j \in S \\ i \neq j}} \lambda_{ij}(t)$$

gdzie:

$P_i(t)$ - prawdopodobieństwo bezwarunkowe przebywania procesu w chwili t w stanie i ,

$\lambda_{ij}(t)$ - intensywność przejścia procesu w chwili t ze stanu i do stanu j .

Gdy proces Markowa jest jednorodny, to intensywności przejścia procesu są niezależne od czasu

$$\lambda_{ij}(t) = \lambda_{ij} = \text{const.}, i \neq j$$

i uzyskuje się układ równań różniczkowych o stałych współczynnikach:

$$\bigwedge_{i \in S} \frac{dP_i(t)}{dt} = \lambda_{ii}P_i(t) + \sum_{\substack{j \in S \\ i \neq j}} \lambda_{ji}P_j(t) \quad (12)$$

dla rozwiązania którego jest potrzebna znajomość prawdopodobieństw początkowych $P_i(0)$, $i \in S$.

Układ powyższy można zapisać w postaci wektorowej, jako:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{P}(t) = \mathbf{A} \mathbf{P}(t) \quad (13)$$

przy czym: $\mathbf{P}(t) = [P_1(t), P_2(t), \dots, P_m(t)]_{m \times 1}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\sum_{j=2}^m \lambda_{j1} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1m} \\ \lambda_{21} & -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^m \lambda_{j2} & \dots & \lambda_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{m1} & \lambda_{m2} & \dots & -\sum_{j=1}^{m-1} \lambda_{jm} \end{bmatrix}$$

gdzie:

$\mathbf{P}(t)$ - wektor kolumnowy prawdopodobieństw przebywania procesu w poszczególnych stanach,

$\mathbf{A}$ - macierz intensywności przejść, $m = \text{card } S$ – liczność zbioru S (liczba stanów procesu).

Macierz intensywności przejść jest macierzą kwadratową. Nosi ona nazwę macierzy quasi – stochastycznej. Dla jej każdej kolumny jest spełniona zależność:

$$\bigwedge_{j \in S} \sum_{i=1} \lambda_{ji} = 0 \quad (14)$$

Układ równań Kołmogorowa ma rozwiązanie w postaci:

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}(0) \exp(\mathbf{A}t) \quad (15)$$

gdzie $\mathbf{P}(0)$ jest wektorem kolumnowym prawdopodobieństw początkowych stanów procesu, a

$$\exp(\mathbf{A}t) = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \mathbf{A}^2 \frac{t^2}{2} + \dots$$

Jeśli obliczenie wartości powyższego rozwinięcia macierzowego jest złożone można posłużyć się przekształceniem Laplace'a. Wyjściowe równanie macierzowe przyjmuje postać:

$$s\mathbf{P}(s) - \mathbf{P}(0) = \mathbf{A}\mathbf{P}(s) \quad (16)$$

lub

$$\mathbf{P}(s) = [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{P}(0) \quad (17)$$

gdzie: $\mathbf{I}$ - macierz jedynkowa o wymiarach $m \times m$.

Poszukiwany wektor prawdopodobieństw oblicza się za pomocą odwrotnego przekształcenia Laplace'a.

$$\mathbf{P}(t) = \mathcal{L}^{-1} [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{P}(0) \quad (18)$$

gdzie: $\mathcal{L}^{-1}$ - operator przekształcenia odwrotnego.

W wielu zastosowaniach praktycznych mają znaczenie tylko wartości asymptotyczne prawdopodobieństw, tj. wartości $\mathbf{P}(t)$ przy $t \rightarrow \infty$. Jeśli przyjąć, że wartości te w ogóle istnieją (proces jest ergodyczny) to równania różniczkowe przekształcają się w równania algebraiczne. Zatem dla procesów o skończonej liczbie stanów i niezerowej macierzy intensywności przejść istnieją graniczne (stacjonarne) prawdopodobieństwa stanów i mogą być one obliczone jako rozwiązania układu równań liniowych:

$$\mathbf{0} = \mathbf{\Pi}\mathbf{A} \quad (19)$$

gdzie: $\mathbf{\Pi}$ - wektor kolumnowy granicznych (stacjonarnych) prawdopodobieństw stanów procesu.

Dla wykluczenia nieoznaczności układu należy wziąć pod uwagę $m - 1$ równań i uzupełnić je równaniem:

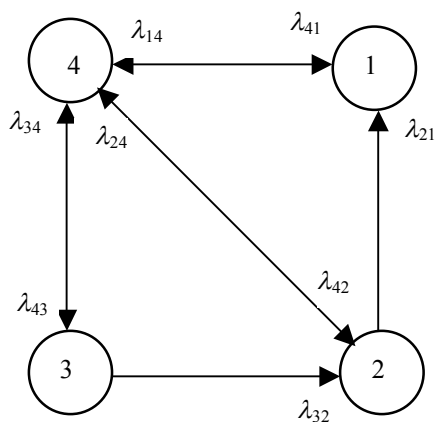
$$\sum_{i=1}^m P_i = 1 \quad (20)$$

Na podstawie grafu stanów i przejść tworzy się układ równań różniczkowych, korzystając z następującej reguły mnemotechnicznej:

„pochodna $\frac{dP_i(t)}{dt}$ dla stanu „ i ” jest równa sumie algebraicznej członów tworzonych przez iloczyn prawdopodobieństwa tego stanu, z którego gałąź (łuk) wychodzi oraz intensywności przejścia odpowiadającej danej gałęzi. Liczba członów sumy jest równa liczbie gałęzi skierowanych łączących stan „ i ” z innymi węzłami grafu. Jeżeli gałąź (łuk) jest skierowana do stanu „ i ” to człon ma znak plus, zaś w przypadku odwrotnym znak minus”.

c) Przykład

Niech $S = \{1, 2, 3, 4\}$ a graf stanów i przejść przedstawia rys. 2.



Rys. 2. Graf stanów i przejść obiektu 4-stanowego

Układ równań Kołmogorowa przyjmie wówczas postać:

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = -\lambda_{14}P_1(t) + \lambda_{21}P_2(t) + \lambda_{41}P_4(t)$$

$$\frac{dP_2(t)}{dt} = -(\lambda_{21} + \lambda_{24})P_2(t) + \lambda_{32}P_3(t) + \lambda_{42}P_4(t)$$

$$\frac{dP_3(t)}{dt} = -(\lambda_{34} + \lambda_{32})P_3(t) + \lambda_{43}P_4(t)$$

$$\frac{dP_4(t)}{dt} = \lambda_{14}P_1(t) + \lambda_{24}P_2(t) + \lambda_{34}P_3(t) - (\lambda_{41} + \lambda_{42} + \lambda_{43})P_4(t)$$

zaś zapis macierzowy jest następujący:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{P}(t) = \mathbf{A} \mathbf{P}(t)$$

$$\mathbf{P}(t) = \begin{bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ P_3(t) \\ P_4(t) \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\lambda_{14} & \lambda_{21} & 0 & \lambda_{41} \\ 0 & -(\lambda_{21} + \lambda_{24}) & \lambda_{32} & \lambda_{42} \\ 0 & 0 & -(\lambda_{34} + \lambda_{32}) & \lambda_{43} \\ \lambda_{14} & \lambda_{24} & \lambda_{34} & -(\lambda_{41} + \lambda_{42} + \lambda_{43}) \end{bmatrix}$$

Używając przekształcenia Laplace'a uzyskujemy układ równań w postaci:

$$sP_1(s) - P_1(0) = -\lambda_{14}P_1(s) + \lambda_{21}P_2(s) + \lambda_{41}P_4(s)$$

$$sP_2(s) - P_2(0) = -(\lambda_{21} + \lambda_{24})P_2(s) + \lambda_{32}P_3(s) + \lambda_{42}P_4(s)$$

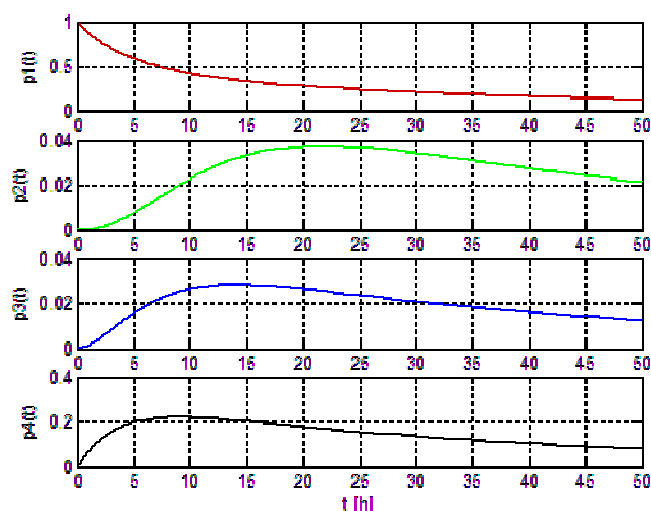
$$sP_3(s) - P_3(0) = -(\lambda_{34} + \lambda_{32})P_3(s) + \lambda_{43}P_4(s)$$

$$sP_4(s) - P_4(0) = \lambda_{14}P_1(s) + \lambda_{24}P_2(s) + \lambda_{34}P_3(s) - (\lambda_{41} + \lambda_{42} + \lambda_{43})P_4(s)$$

Do rozwiązywania układu równań różniczkowych można użyć pakietu MatLAB. Przykładowy skrypt przedstawiono poniżej.

```
format long %wyswietlanie wynikow z wieksza dokladnoscia
L=[-141 121 0 141; 0 -(121+124) 132 142; 0 0 -(132+134) 143; 114 124 134
-(141+142+143)]; % Zdefiniowanie macierzy intensywnosci przejsc
dp=inline([mat2str(L) '*p'],'t','p'); % Definicja funkcji
tspan=[0 50]; % Definiowanie przedzialu czasu dla ktorego szukamy rozwiazan
p0=[1 0 0 0]; % Warunki poczatkowe
[t,p] = ode45(dp, tspan, p0); % uruchomienie obliczen - wyniki macierz p
figure; % rysowanie wykresu
hold on;
subplot(4,1,1);plot(t,p(:,1),'r');ylabel('p1(t)');xlabel('t [h]');grid;
subplot(4,1,2);plot(t,p(:,2),'g');ylabel('p2(t)');xlabel('t [h]');grid;
subplot(4,1,3);plot(t,p(:,3),'b');ylabel('p3(t)');xlabel('t [h]');grid;
subplot(4,1,4);plot(t,p(:,4),'k');ylabel('p4(t)');xlabel('t [h]');grid;
hold off;
```

Po rozwiązaniu układu równań rysowany jest wykres przedstawiający zależność prawdopodobieństwa przebywania układu w danym stanie od czasu (Rys. 3).



Rys. 3. Zależność prawdopodobieństwa stanów p od czasu.

d) Metody procesów semi-Markowa

Coraz szersze zastosowanie w badaniach niezawodności znajdują **procesy półmarkowskie** (semi-Markowa). Stanowią one uogólnienie łańcuchów i jednorodnych procesów Markowa. W procesach półmarkowskich nie jest wymagane założenie co do postaci rozkładów prawdo-

podobieństw czasów przebywania w poszczególnych stanach. Jeżeli założyć, że w danym momencie czasu proces znajdował się w jednym ze stanów, np. S_i , to dalsza ewolucja procesu jest następująca: w losowej chwili Θ_0 układ przechodzi skokowo do nowego stanu, np. S_j . Czas Θ_0 przebywania w stanie S_i do przejścia w stan S_j jest zmienną losową o dowolnym rozkładzie opisanym przez dystrybuantę $G_{ij}(t)$; przejście ze stanu i do stanu j zachodzi z prawdopodobieństwem $p_{ij} > 0$ (przy czym $\sum_j p_{ij} = 1$), jeżeli ze stanu j nastąpi przejście do stanu k to

czas przebywania w stanie j , Θ_1 jest zmienną losową o dowolnym rozkładzie opisanym dystrybuantą $G_{jk}(t)$, itd. Przejście ze stanu i do stanu j w procesie semi-Markowa następuje zatem jakby w dwóch etapach: w pierwszym zostaje określony losowy moment przejścia a w drugim skokowe przejście z jednego stanu w drugi (jak w łańcuchu Markowa).

Prawdopodobieństwo przejścia ze stanu S_i do stanu S_j ($i \neq j$) w przedziale Δt jest dla procesu semi-Markowa określone zależnością:

$$p_{ij}(t, t + \Delta t) = F_{ij}(t + \Delta t) \Pi_{ij} \quad (21)$$

gdzie:

$F_{ij} = P\{\Theta_{ij} < t\}$ - dystrybuanta czasu przebywania procesu w stanie S_i pod warunkiem, że następnym stanem będzie S_j ,

Π_{ij} - warunkowe prawdopodobieństwo przejścia skokowego do stanu S_j przy wyjściu procesu ze stanu S_i .

Stosując zapis macierzowy można określić proces półmarkowski za pomocą:

- macierzy stochastycznej prawdopodobieństw przejść:

$$\mathbf{\Pi} = [\Pi_{ij}] \bigwedge_{i,j \in S} \quad (22)$$

- macierzy dystrybuant warunkowych $\mathbf{F}(t)$

$$\mathbf{F}(t) = [F_{ij}(t)] \bigwedge_{i,j \in S} \quad (23)$$

- wektora prawdopodobieństw początkowych $\mathbf{P}(0)$.

Macierz $\mathbf{\Pi}$ jest nazywana macierzą wewnętrznego łańcucha Markowa.

Jeśli wszystkie dystrybuanty warunkowe mają postać $F_{ij}(x) = 0$ dla $x < 1$ oraz $F_{ij}(x) = 1$ dla $x > 1$ to proces staje się łańcuchem Markowa.

Jeżeli zaś wszystkie dystrybuanty warunkowe mają postać wykładniczą $F_{ij}(t) = 1 - \exp(-\lambda_i t)$ to proces staje się jednorodnym łańcuchem Markowa.

3. Zadania do wykonania

- 1) Pewne urządzenie może znajdować się w dwóch stanach: zdatności i niezdatności. Intensywność uszkodzeń tego urządzenia wynosi λ . Intensywność naprawy tego urządzenia ma wartość μ . Narysuj graf stanów tego urządzenia, wyznacz macierz przejść. Oblicz prawdopodobieństwo przebywania urządzenia w stanie zdatności w dowolnej chwili t , jeśli w chwili $t = 0$ urządzenie funkcjonowało.
- 2) Pewien system chłodzenia składa się z dwóch jednakowych zespołów wentylatorów. Intensywność uszkodzeń wynosi λ . Gdy się zepsuje któryś z nich natychmiast do pracy przystępuje zespół naprawczy. Średni czas naprawy wynosi T_n . Narysuj graf stanów systemu zawierający 3 możliwe stany. Oblicz prawdopodobieństwo przebywania systemu w danym stanie w chwili t przy założeniu, że w chwili początkowej oba zespoły wentylatorów pracowały. Jak zmieniają się te prawdopodobieństwa, gdy zostanie zatrudniona dodatkowo drugi zespół pracowników zajmujący się naprawami?
- 3) Warunki pogodowe mają znaczący wpływ na niezawodność linii napowietrznych. Intensywność uszkodzeń pewnej linii podczas normalnych warunków atmosferycznych wynosi λ_n , zaś intensywność naprawy μ_n . Podczas niekorzystnych warunków atmosferycznych intensywność uszkodzeń jest większa i wynosi λ_a , natomiast intensywność napraw zmniejsza się do μ_a . Średnie czasy trwania pogody normalnej i niekorzystnej wynoszą odpowiednio: N i S . Narysuj graf stanów tego systemu. Oblicz prawdopodobieństwo graniczne (stacjonarne) przebywania w stanie zdatności tej linii napowietrznej.

4. Sprawozdanie

Sprawozdanie powinno zawierać:

- 1) Tabelę tytułową (nazwa i numer ćwiczenia, nazwiska i imiona wykonujących ćwiczenie, data wykonania ćwiczenia oraz data oddania sprawozdania);
- 2) Rozwiązania zadań wraz z opisem i koniecznymi wykresami i schematami;
- 3) Wnioski i obserwacje z wykonanego ćwiczenia.

5. Literatura

- [1] Grabski F., Jaźwiński J.: Funkcje o losowych argumentach w zagadnieniach niezawodności, bezpieczeństwa i logistyki. Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, Warszawa 2009
- [2] Jakubowski J., Sztencel R.: Wstęp do teorii prawdopodobieństwa, wydanie III. Script, Warszawa 2004
- [3] Modarres M., Kaminskiy M., Krivtsov V.: Reliability Engineering and Risk Analysis: A practical Guide. Marcel Dekker, Inc., New York, Basel 1999
- [4] Paska J.: Niezawodność systemów elektroenergetycznych. Oficyna Wydawnicza PW, Warszawa 2005
- [5] Tikhonenko O.: Modele obsługi masowej w systemach informacyjnych. Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT, Warszawa 2003