



opracował: prof. dr hab. inż. Józef Paska, mgr inż. Piotr Marchel

Ćwiczenie nr 3. Wykorzystanie minimalnych dróg i/lub przekrojów w analizie niezawodności systemów

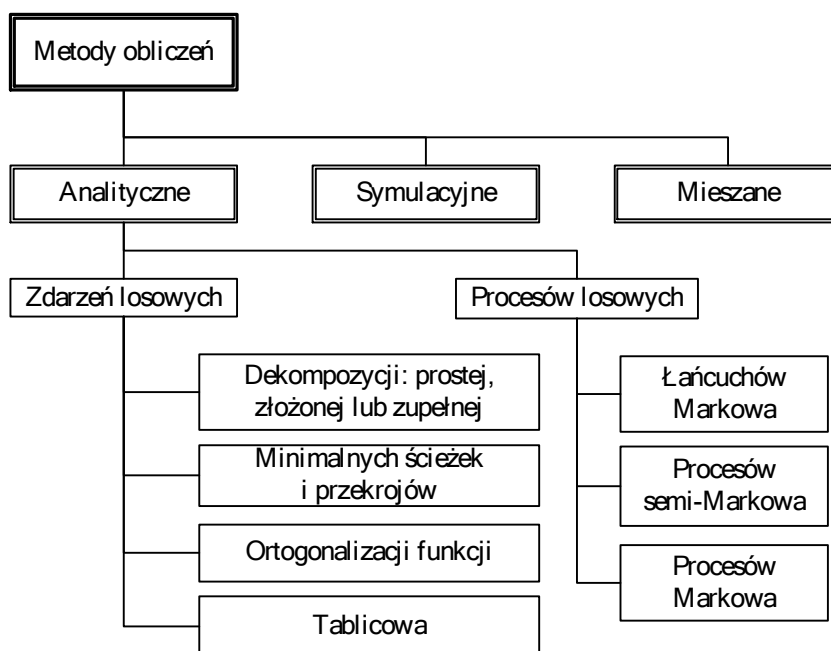
1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest poznanie metody minimalnych dróg i przekrojów w analizie niezawodności oraz nabycie umiejętności ich wykorzystania do obliczeń niezawodności systemów o złożonych strukturach niezawodnościowych.

2. Wprowadzenie

a) Podział metod obliczeniowych

W przypadku systemów o złożonej strukturze niezawodnościowej istnieje wiele metod obliczeń wskaźników niezawodności, różniących się pomiędzy sobą dokładnością i czasem obliczeń. Można je podzielić na trzy podstawowe grupy: analityczne, w których zdarzenia lub procesy losowe poddawane są analizie; symulacyjne, w których zdarzenia lub procesy losowe są symulowane oraz mieszane, w których wykorzystuje się oba wyżej wymienione podejścia. Szczegółowy podział metod obliczeń niezawodnościowych został przedstawiony na rys. 1.



Rys. 1. Podział metod obliczeń niezawodnościowych

b) Metoda minimalnych dróg i/lub przekrojów

Metoda minimalnych dróg oraz metoda minimalnych przekrojów należą do *metod analizy strukturalnej*. Pozwalają one na zmniejszenie liczby analizowanych stanów, w porównaniu do metody przeglądu zupełnego, poprzez wprowadzenie elementów zastępczych, odwzorowujących grupy elementów. Wykorzystuje się w nich teorię grafów i przedstawienie struktury niezawodnościowej obiektu w postaci grafu.

Stan systemu jest losową realizacją wektora stanu systemu:

$$X(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_j(t), \dots, x_n(t)] \quad (1)$$

gdzie:

n – liczba elementów systemu,

$x_j(t)$ – dwustanowy proces stochastyczny przyporządkowany elementowi u_j ,

$X(t)$ – losowy wektor stanu systemu.

$$x_j(t) = \begin{cases} 1, & \text{gdy element jest sprawny} \\ 0, & \text{gdy element jest niesprawny} \end{cases} \quad (2)$$

Niezawodność systemu jest opisana funkcjonalem określonym na losowych realizacjach wektora stanu systemu $X(t)$

$$R(t) = \Phi[X(t)] \quad (3)$$

gdzie Φ - funkcjonal.

Dla systemu o strukturze monotonicznej strukturalna funkcja systemu może być przedstawiona poprzez minimalne ścieżki sprawności (drogi) lub minimalne ścieżki niesprawności (przekroje):

$$\Phi[X(t)] = \Phi\left\{\bigvee_{i=1, n} \left[\bigwedge_{u_j \in U_{1i}} x_j(t) \right]\right\} = \Phi\left\{\bigwedge_{k=1, r} \left[\bigvee_{u_j \in U_{0k}} x_j(t) \right]\right\} \quad (4)$$

gdzie:

U_{1i} – zbiór elementów systemu stanowiących i -tą minimalną ścieżkę sprawności,

U_{0k} – zbiór elementów systemu stanowiących k -tą ścieżkę niesprawności (przekrój, cięcie),

m – liczba minimalnych ścieżek sprawności,

r – liczba minimalnych ścieżek niesprawności,

$\wedge$ - suma logiczna,

$\vee$ - iloczyn logiczny.

Minimalna ścieżka sprawności (minimalna droga) jest to minimalny zbiór elementów systemu, których sprawność prowadzi do sprawności systemu. Przejście do stanu niesprawności dowolnego elementu z tego zbioru powoduje przejście systemu do stanu niesprawności. Tak więc, z punktu widzenia niezawodności elementy w minimalnej drodze są połączone szeregowo a rzeczywista struktura niezawodnościowa systemu może być odwzorowana ekwiwalentną strukturą równoległo-szeregową, w której minimalne drogi są połączone równolegle.

Minimalna ścieżka niesprawności (minimalny przekrój, cięcie) jest to minimalny zbiór elementów systemu, których niesprawność pociąga za sobą niesprawność systemu. Jeżeli który-

kolwiek z nich przejdzie do stanu sprawności oznacza to przejście systemu do stanu sprawności. Tak więc, z punktu widzenia niezawodności elementy w minimalnym przekroju są połączone równolegle a rzeczywista struktura niezawodnościowa systemu może być odwzorowana ekwiwalentną strukturą szeregowo-równoległą, w której minimalne ścieżki niesprawności (przekroje) są połączone szeregowo.

W kategoriach teorii grafów minimalną drogą będzie taki zbiór gałęzi grafu A_j , że podgraf A_j jest spójny (dla zadanej pary wierzchołków) a dowolny jego podgraf $A_j' \subset A_j$ jest niespójny; natomiast minimalny przekrój to taki zbiór gałęzi (B_s) spójnego (dla zadanej pary wierzchołków) grafu G , że graf $G \setminus B_s$ jest niespójny, zaś graf $(G \setminus B_s) \cup (B_s)$ jest spójny dla dowolnej gałęzi $i(B_s)$ należącej do zbioru B_s .

Każdej minimalnej ścieżce można przyporządkować dwuwartościową funkcję:

$$\begin{aligned} S_i[X(t)] &= \prod_{u_j \in U_{1i}} x_j(t) \\ N_k[X(t)] &= 1 - \prod_{u_j \in U_{ok}} [1 - x_j(t)] \end{aligned} \quad (5)$$

gdzie:

S_i – funkcja określona na stanach niezawodnościowych i -tej ścieżki sprawności przyjmująca wartość „1”, gdy wszystkie elementy wchodzące w skład ścieżki są sprawne i „0” w przeciwnym przypadku;

N_k – funkcja określona na stanach niezawodnościowych k -tej ścieżki niesprawności przyjmująca wartość „0”, gdy wszystkie elementy wchodzące w skład ścieżki są niesprawne i „1” w przeciwnym razie.

Strukturalną funkcję systemu można zatem zapisać w postaci:

$$\Phi[X(t)] = 1 - \prod_{i=1}^m \{1 - S_i[X(t)]\} = \prod_{k=1}^r N_k[X(t)] \quad (6)$$

zaś niezawodność systemu będzie określona przez wskaźniki:

- prawdopodobieństwo dyspozycyjności funkcjonowania (zdatności) w przedziale $(0, t)$:

$$R_s(t) = P\{\Phi[X(t)] = 1\} = E[\Phi(X(t))] \quad (7)$$

- średni czas dyspozycyjności funkcjonowania (zdatności):

$$\bar{T} = \frac{R_s(t)}{\sum_{i=1}^n \frac{\partial R_s(t)}{\partial R_i(t)} R_i(t) \lambda_i(t)} \quad (8)$$

- średni czas niedyspozycyjności funkcjonowania (niezdatności):

$$\bar{T}_0 = \frac{1 - R_s(t)}{\sum_{i=1}^n \frac{\partial R_s(t)}{\partial R_i(t)} R_i(t) \lambda_i(t)} \quad (9)$$

gdzie:

$R_i(t)$ – prawdopodobieństwo stanu dyspozycyjności funkcjonowania (zdatności) elementu „i” w przedziale $(0, t)$;

E – wartość oczekiwana.

Zależność na $R_s(t)$ można zapisać za pomocą funkcji określonych na stanach niezawodnościowych ścieżek niesprawności lub sprawności:

$$\left\{ \begin{aligned} R_s^{\text{MP}}(t) &= 1 - P\left[\bigcup_{k=1}^r N_k = 0\right] = \\ &= 1 - \left[\sum_{k=1}^r P(N_k = 0) - \sum_{\substack{k,j=1 \\ k < j}}^r P(N_k = 0, N_j = 0) + \dots + (-1)^{r+1} P(N_1 = 0, N_2 = 0, \dots, N_r = 0) \right] \\ R_s^{\text{MD}}(t) &= P\left[\bigcup_{i=1}^m S_i = 1\right] = \\ &= \sum_{i=1}^m P(S_i = 1) - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^m P(S_i = 1, S_j = 1) + \dots + (-1)^{m+1} P(S_1 = 1, S_2 = 1, \dots, S_m = 1) \end{aligned} \right. \quad (10)$$

gdzie $\cup$ jest symbolem sumy mnogościowej zdarzeń losowych.

Gdy elementy systemu są niezależne, wówczas:

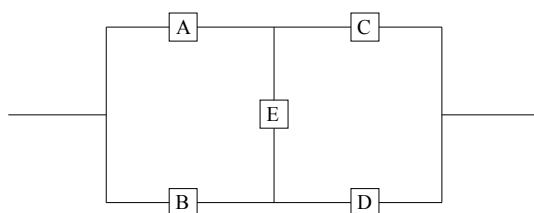
$$\begin{aligned} P(N_k = 0) &= \prod_{j: u_j \in U_{0k}} Q_j(t) = \prod_{j: u_j \in U_{0k}} F_j(t) \\ P(S_i = 1) &= \prod_{j: u_j \in U_{1i}} R_j(t) \end{aligned} \quad (11)$$

Nawet jednak wtedy zależności na $R_s(t)$ są dość skomplikowane, zwłaszcza przy dużej liczbie minimalnych dróg i minimalnych przekrojów. Dalsze uproszczenie zależności uzyskuje się zakładając dodatkowo niezależność minimalnych ścieżek niezdatności (zdatności). Wówczas otrzymuje się zależności przybliżone:

$$\begin{aligned} R_s^{\text{MP}}(t) &\approx \prod_{k=1}^r \left\{ 1 - \prod_{j: u_j \in U_{0k}} [1 - R_j(t)] \right\} \\ R_s^{\text{MD}}(t) &\approx 1 - \prod_{i=1}^m \left[1 - \prod_{j: u_j \in U_{1i}} R_j(t) \right] \end{aligned} \quad (12)$$

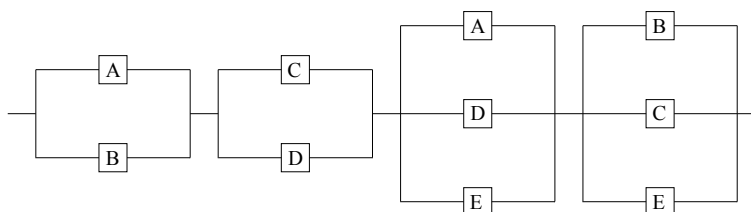
c) Przykład

Dobłą ilustracją możliwości wykorzystania metod minimalnych ścieżek (zdatności lub niezdatności) jest system o strukturze mostkowej (rys. 2), złożony z 5 elementów (A, B, C, D, E).



Rys. 2. System o mostkowej strukturze niezawodnościowej

System ten ma 2 minimalne przekroje dwuelementowe i 2 trójelementowe (rys. 3) oraz 4 minimalne drogi: $\{A, C\}$, $\{B, D\}$, $\{A, E, D\}$, $\{B, E, C\}$.



Rys. 3. Minimalne przekroje systemu o mostkowej strukturze niezawodnościowej

Zastosowanie metody minimalnych dróg oraz metody minimalnych przekrojów, przy założeniu niezależności elementów systemu oraz reprezentowaniu ich funkcji niezawodności przez wartości stałe i jednakowe dla wszystkich elementów ($R_A(t) = R_B(t) = R_C(t) = R_D(t) = R_E(t) = R$), prowadzi do zależności:

$$\begin{aligned} R_s &= R_s^{\text{MP}} = R_s^{\text{MD}} = 2R^2 + 2R^3 - 5R^4 + 2R^5 \\ R_{\text{MD}} &= 1 - (1 - R^2)^2 (1 - R^3)^2 \\ R_{\text{MP}} &= [1 - (1 - R)^2]^2 [1 - (1 - R)^3]^2 \end{aligned} \quad (13)$$

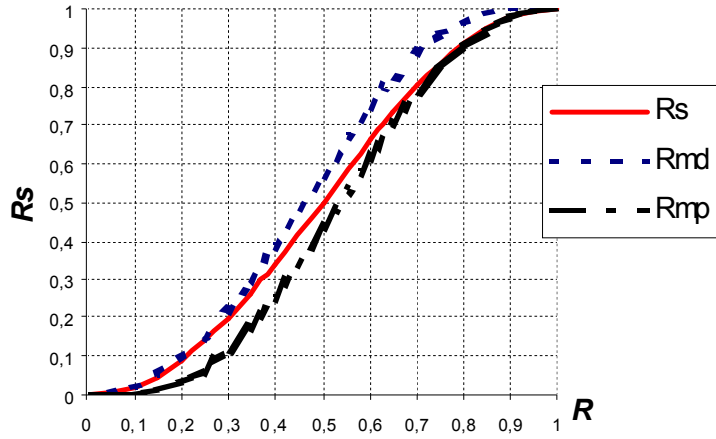
gdzie:

R_{MD} – przybliżenie polegające na założeniu niezależności minimalnych ścieżek zdadności (sprawności);

R_{MP} – przybliżenie polegające na założeniu niezależności minimalnych ścieżek niezdatności (niesprawności).

Na rys. 4 przedstawiono zależność funkcji niezawodności systemu o strukturze mostkowej, obliczonej w sposób dokładny i przybliżony, od funkcji niezawodności elementu. Wynika z niego, że dokładna wartość funkcji niezawodności systemu zawiera się pomiędzy przybliżeniami:

$$R_{\text{MP}}(t) \leq R_s(t) \leq R_{\text{MD}}(t) \quad (14)$$



Rys. 4. Niezawodność systemu o mostkowej strukturze niezawodnościowej w zależności od niezawodności elementów składowych (R) oszacowana dokładnie i w sposób przybliżony

d) Wyznaczanie minimalnych przekrojów na podstawie minimalnych dróg

Określenie minimalnych dróg (minimalnych ścieżek) można zrealizować różnymi sposobami, znanymi z teorii grafów. W rozpatrywanym przypadku, przy założeniu, że wierzchołki grafu są całkowicie niezawodne,

Z kolei, jeden ze sposobów określenia minimalnych ścieżek niesprawności (przekrojów) polega na wykorzystaniu macierzy minimalnych ścieżek sprawności U_1 o wymiarach $m \times n$, gdzie:

m – liczba minimalnych dróg, n – liczba elementów systemu (węzłów i gałęzi); w której na miejsce elementu u_{ij} wpisuje się jedynkę gdy element u_j należy do i -tej drogi (U_{1i}) i zero w przeciwnym razie. W rozpatrywanym przykładzie mamy 6 minimalnych dróg a macierz ta ma następującą postać::

$$\{u_{1i}\}_{i=1,6} = \begin{cases} A, C, G, H \\ A, D, I \\ A, E \\ B, C, D, I \\ B, C, E \\ B, G, H \end{cases} \quad (15) \quad U_1 = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C & D & E & G & H & I \end{matrix} \\ \begin{matrix} u_{11} \\ u_{12} \\ u_{13} \\ u_{14} \\ u_{15} \\ u_{16} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (16)$$

Wyznaczanie minimalnych przekrojów prowadzi się wg liczby wchodzących w nie elementów systemu (przekroje jednoelementowe, dwuelementowe, itd.) rozpatrując różne kombinacje (od 1 do n) wektorów – kolumn macierzy U . Jeśli dla pewnego elementu u_k składowe wektora kolumny $U_{i,k} = 1$ dla wszystkich $i = \overline{1, m}$ (czyli jeśli należy on do wszystkich dróg) to element ten jest przekrojem jednoelementowym (w rozpatrywanym przykładzie nie występują przekroje jednoelementowe). Dla wyznaczenia przekrojów dwuelementowych rozpatruje się po dwie kolumny macierzy U (względem dwóch dowolnych elementów u_k, u_l) i jeśli suma logiczna

$$\bigwedge_{i \in \overline{1, m}} U_{i,k} \vee U_{i,l} = 1 \quad (17)$$

to elementy u_k, u_l tworzą przekrój dwuelementowy (np. elementy A i B). Analogicznie wyznacza się przekroje złożone z większej liczby elementów. Dla zapewnienia minimalności przekrojów nie rozpatruje się w kolejnych etapach kombinacji tych elementów, które stanowiły już przekroje w poprzednich etapach (np. przy określaniu przekrojów dwuelementowych nie rozpatruje się elementów tworzących przekroje jednoelementowe, przy trójelementowych - dwuelementowych i jednoelementowych, itd.). Tak postępując otrzymamy: jeden przekrój dwuelementowy – {A, B}; 6 przekrojów trójelementowych {A, C, G}; {A, C, H}; {D, E, G}; {D, E, H}; {E, G, I}; {E, H, I}; oraz 2 przekroje czteroelementowe {B, C, D, E}; {B, C, E, I}.

$$\{u_{0i}\}_{i=1,9} = \begin{cases} A, B \\ A, C, G \\ A, C, H \\ D, E, G \\ D, E, H \\ E, G, I \\ E, H, I \\ B, C, D, E \\ B, C, E, I \end{cases} \quad (18)$$

3. Zadania do wykonania

- 1) Korzystając z arkusza kalkulacyjnego Excel, wyznacz, używając metody minimalnych dróg i przekrojów funkcję niezawodności systemu o przedstawionej strukturze niezawodnościowej.
- 2) Dla danych jak w ćwiczeniu 1 wyznacz funkcję niezawodności systemu $R(x)$ korzystając z programu „Struktura”. Porównaj wynik uzyskanych obliczeń z wynikami uzyskanymi w ćwiczeniu 1.

4. Sprawozdanie

Sprawozdanie powinno zawierać:

- 1) Tabelę tytułową (nazwa i numer ćwiczenia, nazwiska i imiona wykonujących ćwiczenie, data wykonania ćwiczenia oraz data oddania sprawozdania);
- 2) Rozwiązania zadań wraz z opisem i koniecznymi wykresami i schematami;
- 3) Wnioski i obserwacje z wykonanego ćwiczenia.

5. Literatura

- [1] Paska J.: Niezawodność systemów elektroenergetycznych. Oficyna Wydawnicza PW. Warszawa 2005