



opracował: prof. dr hab. inż. Józef Paska, mgr inż. Piotr Marchel

Ćwiczenie nr 1. ***Budowa modeli niezawodności i analiza właściwości podstawowych rozkładów zmiennych losowych stosowanych w teorii niezawodności***

1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest zaznajomienie się z podstawowymi pojęciami z zakresu niezawodności, poznanie podstawowych cech elementów niezawodnościowych i ich klasyfikacji oraz poznanie podstawowych wielkości charakteryzujących modele niezawodnościowe.

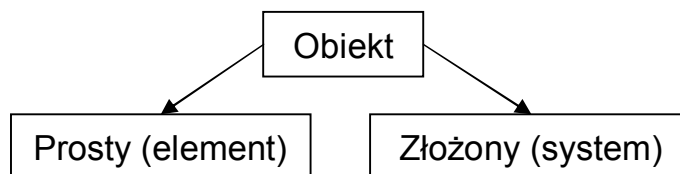
2. Wprowadzenie

a) Podstawowe pojęcia

Niezawodność (urządzenia / systemu) jest to zdolność do poprawnego wykonywania zadań przez urządzenie/system w określonym czasie i warunkach eksploatacyjnych.

Obiekt jest to pojęcie pierwotne określające w zależności od potrzeb:

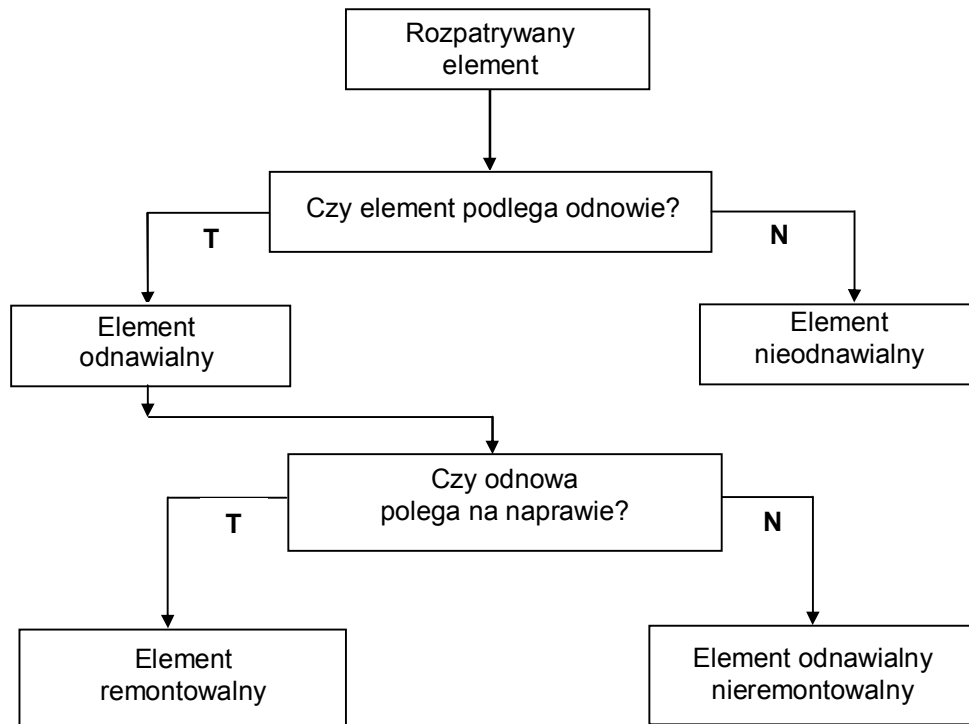
- niepodzielny element (bez uwzględnienia jego struktury wewnętrznej)
- zbiór elementów tworzących system.



Rys. 1. Klasyfikacja obiektów

Element jest to taki obiekt, który podczas analizy niezawodności jest traktowany jako niepodzielna całość. Klasyfikacje elementów została przedstawiona na rys. 2.

System jest to grupa niezależnych elementów, połączonych ze sobą w celu wykonywania określonego zadania i tworzących określoną strukturę niezawodnościową.



Rys. 2. Klasyfikacja elementów

b) Wskaźniki niezawodności elementów nieodnawialnych

Element nieodnawialny jest w pełni scharakteryzowany przez rozkład czasu funkcjonowania τ (bezawaryjnej pracy).

Podstawowe charakterystyki (wskaźniki) niezawodności elementu nieodnawialnego to:

- $F(t) = P\{\tau < t\} = Q(t)$ – funkcja zawodności (dystrybuanta rozkładu); (1)
- $R(t) = P\{\tau \geq t\} = 1 - F(t)$ – funkcja niezawodności; (2)
- $f(t) = \frac{dF(t)}{dt}$ – gęstość prawdopodobieństwa, (3)

gdzie:

$F(t)$ – dystrybuanta zmiennej losowej;

$R(t)$ – prawdopodobieństwo funkcjonowania elementu (niezawodność elementu);

$f(t)$ – gęstość prawdopodobieństwa rozkładu.

- Względną gęstość prawdopodobieństwa zmiennej losowej τ nazywa się intensywnością niesprawności awaryjnych (uszkodzeń) – zwana jest ona również funkcją ryzyka:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{F'(t)}{1 - F(t)} = \frac{1}{R(t)} \cdot \frac{dR(t)}{dt} \quad (4)$$

Poza powyższymi charakterystykami (wskaźnikami) niezawodności elementu nieodnawialnego ($R(t)$, $\lambda(t)$) są podawane:

- *Skumulowana intensywność niesprawności awaryjnych* (uszkodzeń), zwana też *skumulowaną funkcją ryzyka*:

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(t) dt \quad (5)$$

Zachodzi związek:

$$R(t) = R(0) \exp \left[- \int_0^t \lambda(t) dt \right] = R(0) \exp[-\Lambda(t)] \quad (6)$$

Najczęściej zakłada się, że w chwili rozpoczęcia eksploatacji $t = 0$ element jest w stanie zdatności, czyli że $R(0) = 1$. Wtedy:

$$\begin{aligned} R(t) &= \exp[-\Lambda(t)] \\ \Lambda(t) &= -\ln R(t) \end{aligned} \quad (7)$$

- *Średnia wartość funkcji ryzyka* (intensywności uszkodzeń) w przedziale $[0, t]$:

$$\overline{\lambda(t)} = \frac{\Lambda(t)}{t} \quad (8)$$

- *Pozostały oczekiwany czas poprawnej pracy* (do uszkodzenia)

$$r(t) = \frac{1}{R(t)} \int_t^\infty R(t) dt = \frac{E[\tau] - \int_0^t R(t) dt}{R(t)}, \quad (9)$$

gdzie:

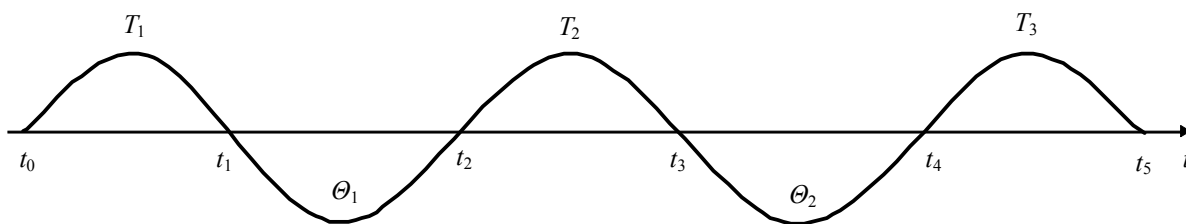
$E[\tau]$ jest oczekiwanym czasem funkcjonowania (poprawnej pracy) do uszkodzenia.

Pozostały oczekiwany czas poprawnej pracy lepiej charakteryzuje niezawodność elementu od oczekiwanego czasu funkcjonowania $E[\tau]$. Dla $t = 0$: $r(t) = r(0) = E[\tau]$, zaś dla $t > 0$: $r(t)$ ma zwykle przebieg malejący, gdyż w rzeczywistych urządzeniach zachodzą procesy starzeniowe.

c) Wskaźniki niezawodności elementów odnawialnych

Element odnawialny ma w ogólnym przypadku cztery stany podstawowe: funkcjonowania, remontu awaryjnego, remontu profilaktycznego, rezerwy.

Jeśli pominie się stany remontu profilaktycznego i rezerwy to modelem procesu eksploatacji elementu odnawialnego jest proces odnowy o skończonym nie zerowym czasie odnowy. Przykład takiego procesu przedstawiono na rys. 3.



Rys. 3. Przykład procesu odnowy z niezerowym czasem odnowy

Ciąg $t_1, t_3, \dots, t_{2k+1}, \dots$ tworzą chwile kolejnych uszkodzeń, natomiast ciąg $t_2, t_4, \dots, t_{2k}, \dots$ chwile odnowień.

Są tu również dwa ciągi zmiennych losowych $T_1, T_2, \dots, T_k, \dots$ oraz $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_k, \dots$ określające czasy funkcjonowania (pracy) i czasy odnowy. Ciągi te tworzą dwa strumienie zdarzeń: strumień niesprawności (uszkodzeń) i strumień odnów.

Rzeczywisty proces odnowy można zatem analizować za pomocą dwóch procesów losowych:

- $\{N(t), t \geq 0\}$, wyrażającego liczbę uszkodzeń w przedziale czasowym $[0, t]$;
- $\{m(t), t \geq 0\}$, wyrażającego liczbę odnowień w przedziale czasowym $[0, t]$.

W związku z tym można rozpatrywać dwie funkcje:

$$H(t) = E[N(t)] \quad (10)$$

wyrażającą oczekiwaną liczbę uszkodzeń w przedziale $[0, t]$ i zwaną funkcją odnowy, oraz

$$I(t) = E[m(t)] \quad (11)$$

określającą oczekiwaną w danym przedziale czasowym liczbę odnów i mającą analogiczne jak funkcja odnowy właściwości.

Gdy zmienne losowe T_k mają ten sam rozkład o parametrach $E[T]$ i σ_T oraz zmienne losowe Θ_k o parametrach $E[\Theta]$ i σ_Θ (strumienie rekurentne), wówczas przy oszacowaniu funkcji można wykorzystać tzw. *elementarne twierdzenie odnowy*:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{H(t)}{t} = \frac{1}{E[T]}, \quad (12)$$

zaś zmienna losowa $H(t)$ ma rozkład asymptotycznie normalny o wartości oczekiwanej:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E[m(t)] = \frac{1}{E[T] + E[\Theta]} \quad (13)$$

i wariancji

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{Var}[m(t)] = \frac{(\sigma_T^2 + \sigma_\Theta^2)t}{(E[T] + E[\Theta])^3} \quad (14)$$

Wskaźnikiem niezawodności elementu, którego modelem niezawodnościowym procesu eksploatacji jest rzeczywisty proces odnowy z niezerowym czasem odnowy, jest *współczynnik gotowości*.

Definiuje się go jako prawdopodobieństwo, że w chwili t obiekt znajduje się w stanie funkcjonowania (zdatności)

$$K(t) = \sum_{i=1}^{\infty} P \left\{ \sum_{k=0}^i (T_k + \Theta_k) < t < \sum_{k=0}^i (T_k + \Theta_k) + T_{i+1} \right\} \quad (15)$$

Gdy wartość t jest dostatecznie duża można posługiwać się *asymptotycznym współczynnikiem gotowości*

$$K = \lim_{t \rightarrow \infty} K(t) = \frac{E[T]}{E[T] + E[\Theta]} \quad (16)$$

Dla przypadku, gdy czas funkcjonowania i czas odnowy mają rozkłady wykładnicze, mamy:

$$K = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mu + \lambda \exp[-(\mu + \lambda)t]}{\mu + \lambda} = \frac{\mu}{\mu + \lambda} \quad (17)$$

gdzie:

μ - intensywność odnowy,

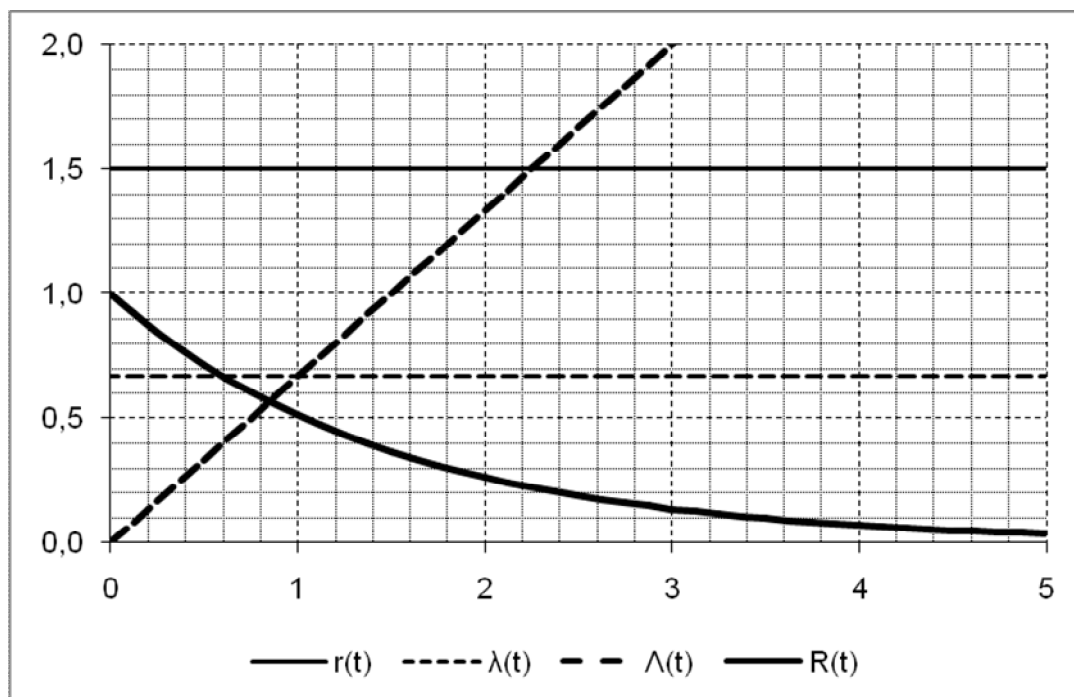
λ - intensywność uszkodzeń.

d) Najczęściej stosowane rozkłady w teorii niezawodności

Tabela 1. Charakterystyki najczęściej stosowanych rozkładów

Rozkład	$R(t)$	$\lambda(t)$	$A(t)$	$r(t)$
Wykładniczy EXP(b) $T \in \langle 0, +\infty \rangle, b > 0$	$\exp(-t/b)$	$1/b$	t/b	b
Weibulla WEI(b, ν) $T \in \langle 0, +\infty \rangle, b > 0, \nu > 0$	$\exp(-(t/b)^\nu)$	$\frac{\nu}{b}(t/b)^{\nu-1}$	$(t/b)^\nu$	$b \exp[-(t/b)^\nu] \left\{ \Gamma(1+1/\nu) - b \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{(t/b)^{i\nu+1}}{i!(i\nu+1)} \right\}$
Wartości najmniejszych MIV(b_0, t_0) $b_0 > 0, t_0 \geq 0$	$\exp[-\exp((t-t_0)/b_0)]$	$\frac{1}{b_0} \exp((t-t_0)/b_0)$	$\exp((t-t_0)/b_0)$	
Potęgowy POW(b, δ) $T \in \langle 0, b \rangle, b > 0, \delta > 0$	$1 - (t/b)^\delta$	$\frac{\delta}{b} (t/b)^{\delta-1} [1 - (t/b)^\delta]^{-1}$	$-\ln[1 - (t/b)^\delta]$	$b [1 - (t/b)^\delta]^{-1} \left\{ \frac{\delta}{\delta+1} + \frac{1}{\delta+1} (t/b)^{\delta+1} - (t/b) \right\}$
Gamma GAM(b, p) $T \in \langle 0, +\infty \rangle, b > 0, p > 0$	$1 - \frac{\Gamma(p, t/b)}{\Gamma(p)}$	$(t/b)^{p-1} \exp(-(t/b)) \{ b [\Gamma(p) - \Gamma(p, t/b)] \}^{-1}$	$-\ln(1 - \Gamma(p, t/b)/\Gamma(p))$	$b [p - (t/b) + \sum_{i=0}^{\infty} \Gamma(p+i+1, t/b)/\Gamma(p+i+1)] \times [1 - \Gamma(p, t/b)/\Gamma(p)]^{-1}$
Normalny NOR(μ, σ) $\mu \geq 0, \sigma > 0$	$0,5 - \Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$	$\phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right) \left\{ \sigma \left[0,5 - \Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right) \right] \right\}^{-1}$	$-\ln \left[0,5 - \Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right) \right]$	

Rozkład	$R(t)$	$\lambda(t)$	$\Lambda(t)$	$r(t)$
Logarytmo – normalny $\text{LNOR}(\mu_1, \sigma_1)$ $T \in \langle 0, +\infty), \mu_1 \geq 0,$ $\sigma_1 > 0$	$0,5 - \Phi\left(\frac{\ln(t) - \mu_1}{\sigma_1}\right)$	$\varphi\left(\frac{\ln(t) - \mu_1}{\sigma_1}\right) \left\{ \sigma_1 t \left[0,5 - \Phi\left(\frac{\ln(t) - \mu_1}{\sigma_1}\right) \right] \right\}^{-1}$	$-\ln \left[0,5 - \Phi\left(\frac{\ln(t) - \mu_1}{\sigma_1}\right) \right]$	
$\Gamma(p)$ – funkcja gamma Eulera: $\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} \exp(-x) dx$; $\Gamma(p, x)$ – niekompletna (niepełna) funkcja gamma Eulera: $\Gamma(p, x) = \int_0^x t^{p-1} \exp(-t) dt$; $\varphi(\cdot)$ – funkcja Gaussa: $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \exp(-\frac{x^2}{2})$, $\Phi(\cdot)$ – całka Laplace’a: $\Phi(x) = \int_0^x \varphi(z) dz$				



Rys. 4. Przebiegi funkcji $R(t)$, $\Lambda(t)$, $\lambda(t)$ i $r(t)$ w przypadku rozkładu $EXP(b)$

3. Zadania do wykonania

Poniższe zadania należy wykonać używając arkusza kalkulacyjnego Excel z pakietu MS Office oraz programu „Struktura”.

- 1) Intensywność niesprawności pewnego urządzenia jest stała i wynosi $\lambda = 1 \cdot 10^{-5}$ [1/h]. Może być ono zastąpione innym urządzeniem o intensywności uszkodzeń $\lambda(t) = 10^{-8}t$. Które z urządzeń jest bardziej niezawodne po pierwszych: a) 100 h; b) 1 000 h; c) 10 000 h? Przedstawić graficznie funkcję niezawodności tych urządzeń.
- 2) Przy pomocy programu „Struktura” wykonaj obliczenia funkcji niezawodności następujących urządzeń: a) o stałej intensywności uszkodzeń $\lambda = 2 \cdot 10^{-4}$ [1/h], b) o rozkładzie jednostajnym z parametrami $a = 2 \cdot 10^4$ h oraz $b = 7 \cdot 10^4$ h. Wykonaj obliczenia metodami: analityczną oraz symulacyjną przy 100, 1000, 10000 symulacji. Porównaj wyniki. Załącz odpowiednie wykresy.
- 3) Na podstawie danych statystycznych stwierdzono, że trwałość pewnego urządzenia elektroenergetycznego ma rozkład wykładniczy. W przeciągu 5 lat użytkowania 250 egzemplarzy tych urządzeń zanotowano 5 awarii. Obliczyć i przedstawić wykres funkcji niezawodności tego urządzenia. Jakie jest prawdopodobieństwo wystąpienia uszkodzenia tego urządzenia w przeciągu pierwszych dwóch lat funkcjonowania? Jaki jest czas użytkowania tego urządzenia, podczas którego wartość jego funkcji niezawodności będzie nie mniejsza niż 0,995?

- 4) Populacja jednego z elementów pompy liczy 600 egzemplarzy. Na podstawie badań eksperymentalnych, przeprowadzonych na próbie statystycznej tej populacji stwierdzono, że główną przyczyną uszkodzeń tych elementów są ich pęknięcia zmęczeniowe. Rozkład trwałości zmęczeniowej T jest zbliżony do rozkładu normalnego o wartości oczekiwanej $m = 2500$ h i odchyleniu standardowym $\sigma = 300$ h. Należy wyznaczyć, ile elementów spośród populacji, liczącej 600 egzemplarzy, ulegnie uszkodzeniu w okresie pomiędzy $t_1 = 2100$ h i $t_2 = 2600$ h ich funkcjonowania w pompach.
- 5) Wartość oczekiwana długości okresów zdatności pewnego urządzenia wynosi $E[T] = 1200$ h, zaś wartość oczekiwana okresów odnowy $E[\Theta] = 20$ h. Obliczyć dla chwil odległych od początku eksploatacji prawdopodobieństwo przebywania urządzenia w stanie zdatności w dowolnej chwili t .

4. Sprawozdanie

Sprawozdanie powinno zawierać:

- 1) Tabelę tytułową (nazwa i numer ćwiczenia, nazwiska i imiona wykonujących ćwiczenie, data wykonania ćwiczenia oraz data oddania sprawozdania);
- 2) Rozwiązania zadań wraz z opisem oraz koniecznymi wykresami i schematami;
- 3) Wnioski i obserwacje z wykonanego ćwiczenia.

5. Literatura

- [1] Paska J.: Niezawodność systemów elektroenergetycznych. Oficyna Wydawnicza PW. Warszawa 2005
- [2] Szopa T.: Niezawodność i bezpieczeństwo. Oficyna Wydawnicza PW. Warszawa 2009