

Załącznik nr 3  
**Autoreferat Habilitacyjny**

31.07.2014

**1 Imię i Nazwisko**

Dominik Ryszard Sierociuk

**2 Posiadane dyplomy, stopnie naukowe – z podaniem nazwy miejsca, roku ich uzyskania oraz tytuły rozpraw**

- Dyplom magistra inżyniera (z wyróżnieniem), Wydział Elektryczny, Politechnika Warszawska, specjalizacja Automatyka i Inżynieria Komputerowa, tytuł pracy: "Implementacja wybranych algorytmów sterowania adaptacyjnego przy użyciu karty DS 1102", 2002.
- Stopień doktora nauk technicznych, w dziedzinie automatyka i robotyka, Wydział Elektryczny, Politechnika Warszawska, 2008, tytuł: „Estymacja i sterowanie dyskretnych układów dynamicznych ułamkowego rzędu opisanych w przestrzeni stanu”, promotor: dr hab. inż. Andrzej Dzieliński prof. PW., doktorat z wyróżnieniem

**3 Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych**

- 2006-2008 – praca na stanowisku asystenta, Wydział Elektryczny, Instytut Sterowania i Elektroniki Przemysłowej, Politechnika Warszawska
- 2008-obecnie – praca na stanowisku adiunkta, Wydział Elektryczny, Instytut Sterowania i Elektroniki Przemysłowej, Politechnika Warszawska

- 4 Wskazanie osiągnięcia wynikającego z art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (Dz. U. nr 65, poz. 595 ze zm.):

Tytuł jednolitego cyklu publikacji:

**Modelowanie i estymacja wybranych układów dynamicznych niecałkowitego rzędu**

Wskazany cykl publikacji:

- I. Ivo Petras (34%); **Dominik Sierociuk** (33%); Podlubny, I.(33%); , "Identification of Parameters of a Half-Order System", IEEE TRANSACTIONS ON SIGNAL PROCESSING, vol.60, no.10, pp.5561-5566, IF 2.813, 2012
- II. **Dominik Sierociuk** (34%); Igor Podlubny (33%); Ivo Petras (33%); , "Experimental Evidence of Variable-Order Behavior of Ladders and Nested Ladders", IEEE TRANSACTIONS ON CONTROL SYSTEMS TECHNOLOGY, vol.21, no.2, pp.459-466, IF 2.521, 2013
- III. **Dominik Sierociuk** (20%), Andrzej Dzieliński (16%), Grzegorz Sarwas (16%), Ivo Petras (16%), Tomas Skovranek (16%), Igor Podlubny (16%), "Modeling Heat Transfer in Heterogeneous Media Using Fractional Calculus", PHILOSOPHICAL TRANSACTIONS OF THE ROYAL SOCIETY: A, Volume: 371, Issue: 1990, Pages: 1471-2962 , IF 2.864, 2013
- IV. Andrzej Dzieliński (30%), Grzegorz Sarwas (40%), **Dominik Sierociuk** (30%), "Comparison and validation of integer and fractional order ultracapacitor models", ADVANCES IN DIFFERENCE EQUATIONS, Number 1, 11, IF 0.845, 2011
- V. Andrzej Dzielinski (30%); **Dominik Sierociuk** (40%); Grzegorz Sarwas (30%), "Some applications of fractional order calculus", BULLETIN OF THE POLISH ACADEMY OF SCIENCES -TECHNICAL SCIENCES, Volume: 58 Issue: 4 Pages: 583-592, IF 0,945, 2010
- VI. **Dominik Sierociuk** (60%); Ines Tejado (25%); Blas M. Vinagre (15%), "Improved fractional Kalman filter and its application to estimation over lossy networks", SIGNAL PROCESSING, Volume: 91, Issue: 3, Pages: 542-552, IF 1.503, 2011

VII. **Dominik Sierociuk** (70%); **Paweł Ziubiński** (30%), "Fractional order estimation schemes for fractional and integer order systems with constant and variable fractional order colored noise", *CIRCUITS, SYSTEMS, AND SIGNAL PROCESSING* (w druku, doi:10.1007/s00034-014-9835-0), IF 1.264, 2014.

VIII. **Dominik Sierociuk** (70%), **Andrzej Dzielinski** (30%), "New method of fractional order integrator analog modeling for orders 0.5 and 0.25", 16th International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics (MMAR), Miedzyzdroje, Poland, Sierpień 22-25, 2011

W Tabeli 1 zebrane są informacje dotyczące pozycji wskazanych w jednolitym cyklu publikacji.

**Tablica 1:** Analiza wskazanych pozycji jednolitego cyklu publikacji

Nr	Procentowy wkład autora [%]	Impact Factor	Punktacja wg ministerialnego wykazu czasopism	Cytowania wg WoS	Cytowania wg Scopus	Rok publikacji
I	33	2.813	40	7	14	2012
II	34	2.521	35	11	12	2013
III	20	2.864	40	5	5	2013
IV	30	0.845	30	11	13	2011
V	40	0.945	25	9	16	2010
VI	60	1.503	30	8	11	2011
VII	70	1.264 (2013)	25	0	0	2014
VIII	70	-	10	6	4	2011

Sumaryczny współczynnik Impact Factor (zgodny z datą publikacji) wynosi 12.755, a z uwzględnieniem udziału procentowego 4.776. Sumaryczna liczba punktów (wg. rozporządzenia Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego z dnia 13 lipca 2012 r. w sprawie kryteriów i trybu przyznawania kategorii naukowej jednostkom naukowym, stan na 17.12.2013) wynosi 235, a z uwzględnieniem udziału procentowego wynosi 94.6.

Wskaźnik H-index 9 wg bazy Web of Science (na podstawie opracowania Biblioteki Głównej PW), H-index 9 wg bazy Scopus. Sumaryczna liczba cytowań wg bazy Web of Science 275, wg bazy Scopus 265 (wyniki na dzień 31.07.2014 r.).

## 5 Wprowadzenie

Rachunek różniczkowy niecałkowitego rzędu jest uogólnieniem tradycyjnego rachunku różniczkowego na przypadek, gdy zarówno całki, jak i pochodne mogą być niecałkowitego (ułamkowego, a nawet zespolonego) rzędu. Tradycyjny rachunek różniczkowy jest więc tylko szczególnym przypadkiem rachunku różniczkowego niecałkowitego rzędu (dla przypadku rzędów całkowitych). Pierwsza wzmianka o możliwości istnienia pochodnej rzędu  $\frac{1}{2}$  pochodzi z 30 września 1695r., z listu Leibnitz'a do L'Hospital'a. W liście tym Leibnitz pisał: "Thus it follows that  $d^{\frac{1}{2}}x$  will be equal to  $x\sqrt{dx}$ :  $x$ , an apparent paradox, from which one day usefull consequences will be drawn". Idea uogólnienia rachunku różniczkowego dla rzędów niecałkowitych sięga zatem początków samego rachunku różniczkowego.

Następnie była ona rozwijana przez tak znanych matematyków jak: Riemann, Letnikow, Grünwald, Liouville. Pierwsza monografia z tej tematyki została wydana w 1970 r. [8], natomiast pierwsza monografia w języku polskim, autorstwa prof. Piotra Ostalczyka, została wydana w 2008 r. [9]. Więcej informacji na temat tego rachunku można znaleźć w monografiach [10, 4, 6, 2, 13, 7].

Stosunkowo niewielka ilość prac, poświęconych rachunkowi różniczkowemu niecałkowitego rzędu, przedstawia wyniki badań eksperymentalnych. Dla przykładu, w artykule [17] zostały przedstawione wyniki modelowania kondensatorów, w pracy [12] – wyniki modelowania ultrakondensatorów, w pracy [16] – wyniki modelowania piezo-aktuatorów. W artykule [5] zostały przedstawione wyniki modelowania złożonej dynamiki tkanek biologicznych.

W szczególności zaś mało jest prac, w których użycie rachunku różniczkowego do modelowania danego procesu czy układu jest poprawnie umotywowane, a niecałkowity rząd nie jest traktowany tylko jako dodatkowy parametr przy optymalizacji.

W mojej działalności naukowej po doktoracie starałem się otrzymać i przeanalizować zarówno wyniki eksperymentalne, jak i teoretyczne w dwóch głównych rejonach moich naukowych zainteresowań:

- Identyfikacji i modelowania wybranych układów dynamicznych z użyciem rachunku różniczkowego niecałkowitego rzędu wraz z dokładnym umotywowaniem matematycznym jego stosowania.
- Estymacji dyskretnych układów niecałkowitego rzędu, przy pomiarach otrzymywanych bezpośrednio lub poprzez sieć transmisyjną.

Szczególnie interesującym przykładem okazał się proces dyfuzji, który odpowiednio interpretowany można zredukować do relacji zawierającej pochodną niecałkowitego rzędu. Dzięki temu użycie rachunku różniczkowego niecałkowitego rzędu do modelowania takiego procesu jest bardzo dobrze uzasadnione. Przeprowadziłem więc badania eksperymentalne procesu dyfuzji i dyfuzji anomalnej (opisanej równaniami różniczkowymi cząstkowymi niecałkowitego rzędu) w postaci modeli analogowych, których wyniki opublikowane zostały w [I,II,VIII], a ich skrót przedstawiony jest w Rozdziale 6. Kolejnymi badaniami, jakie przeprowadziłem, były badania procesu nagrzewania, który także może zostać opisany równaniem dyfuzji lub dyfuzji anomalnej (w zależności od jednolitości ośrodka), a którego wyniki badań zostały zaprezentowane w [III,V] i skrótowo przedstawione w Rozdziale 7. Przeprowadziłem także badania ultrakondensatorów, których zasada działania opiera się na zjawisku dyfuzji na ograniczonym obszarze. Wyniki tych badań zostały opublikowane w [IV,V] i skrótowo przedstawione w Rozdziale 8. W pracach [VI,VII] zostały przedstawione algorytmy estymacji dyskretnych układów niecałkowitego rzędu, zarówno dla danych mierzonych bezpośrednio, jak i poprzez sieć komunikacyjną, a także bez i przy obecności szumów niecałkowitego rzędu.

## 6 Modelowanie analogowe układów niecałkowitego rzędu

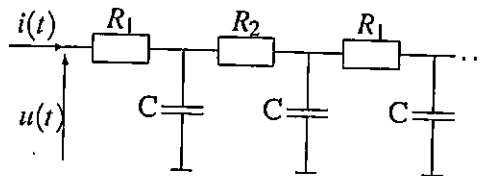
W rozdziale tym zostaną skrótowo przedstawione najważniejsze wyniki z zakresu modelowania analogowego układów niecałkowitego rzędu, które zostały przedstawione w pracach [I,II,VIII].

### 6.1 Udoskonalona metoda modelowania analogowego członów rzędu 0.5 oraz 0.25

Opracowałem nową metodę realizacji członu całkującego niecałkowitego rzędu równego 0.5 i 0.25 [VIII]. Metoda ta oparta jest na strukturze drabinkowej (ang. domino ladder). Wadą tradycyjnej

metody realizacji, opartej na aproksymacji drabinkowej linii długiej, była niedokładność odwzorowania przesunięcia fazowego. Przesunięcie to, dla członu całkującego 0.5, osiągało pożądaną wartość  $45^\circ$  tylko dla bardzo wąskiego zakresu częstotliwości.

Zaproponowana przeze mnie metoda polegała na wprowadzeniu określonych dwóch wartości rezystorów naprzemiennie stosowanych w aproksymacji linii długiej. Schemat tej metody przedstawiony jest na rysunku 1.



Rysunek 1: Zaproponowany model analogowy członu całkującego rzędu 0.5

Przy zachowaniu relacji pomiędzy rezystancjami  $R_1$  i  $R_2$  jako równego  $R_1/R_2 \approx 0.25$  przesunięcie fazy jest znacząco lepiej odwzorowane dla szerszego zakresu częstotliwości niż w przypadku tradycyjnej metody. Porównanie tych dwóch metod przedstawione jest na Rysunku 2 (górny rysunek pokazuje metodę tradycyjną, dolny metodę zaproponowaną).

Ponadto zaproponowałem także jeszcze dokładniejszą metodę zakładającą określone dwie wartości pojemności kondensatorów stosowane naprzemiennie.

Następnie zaproponowałem sposób analogowego modelowania członu całkującego rzędu 0.25. Struktura takiego członu jest pokazana na Rysunku 3, gdzie  $Z_{0.5}$  jest impedancją członu 0.5.

Przykład realizacji takiego członu pokazuje Rysunek 4.

Dalsze badania skupiały się na analizie dynamiki otrzymanych realizacji praktycznych członów całkujących rzędu 0.5 oraz 0.25 wraz z opracowaniem algorytmów identyfikacji dla tych układów.

## 6.2 Identyfikacja parametryczna modelu analogowego rzędu 0.5

W artykule [I] został przedstawiony algorytm identyfikacji modelu analogowego o rzędzie 0.5 zrealizowanego podaną przeze mnie metodą.

Modelem identyfikowanym był układ inercyjny o następującej transmitancji:

$$G(s) = \frac{0.82}{7.8719s^{0.5} + 1} \quad (1)$$

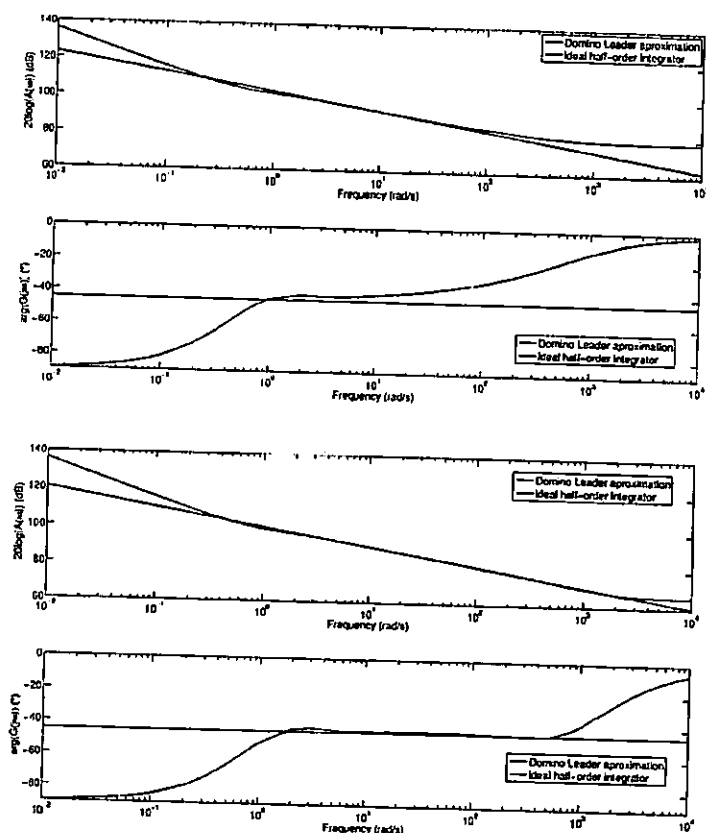
Odpowiedź takiego układu (zawiera funkcję Mittag-Leffler'a) dana jest następująco:

$$y(t) = KE_{\alpha,1}(-at^\alpha) \quad (2)$$

gdzie  $E_{\alpha,\beta}(z)$  jest funkcją Mittag-Leffler'a daną jako

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad (3)$$

Identyfikacja parametryczna została przeprowadzona poprzez dopasowanie odpowiedzi do funkcji Mittag-Leffler'a przy użyciu algorytmu "MLFFIT" dostępnego w Matlab Central File Exchange, co



Rysunek 2: Wyniki modelowania analogowego członu całkującego rzędu 0.5 (tradycyjna metoda – górny, proponowana metoda – dolny)

poskutkowało otrzymaniem następujących parametrów:

$$\alpha = 0.4820, K = 1.2259, a = 0.1364. \quad (4)$$

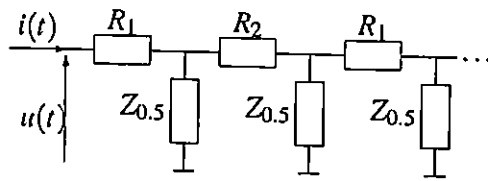
Wyniki identyfikacji w dziedzinie czasu są przedstawione na Rysunku 5. Dodatkowo został przedstawiony obszar odpowiedzi wynikający z tolerancji użytych elementów. Obszar ten uwzględniał także tolerancję rzędu kondensatorów użytych do budowy modelu analogowego członu całkującego.

Otrzymane wyniki potwierdziły wysoką dokładność użytego modelu analogowego oraz skuteczność użytej metody identyfikacji parametrycznej.

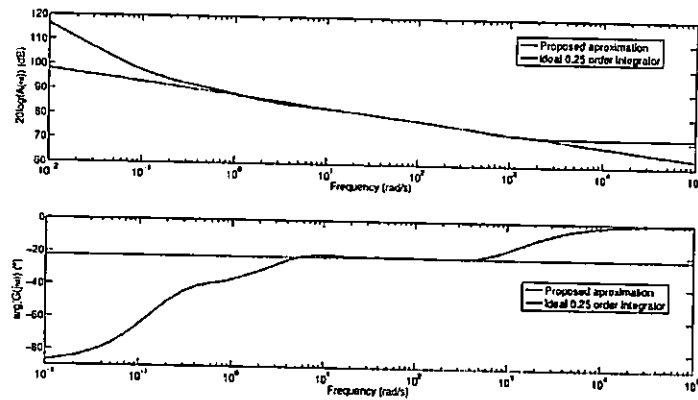
### 6.3 Eksperymentalna weryfikacja odpowiedzi modeli analogowych o rzędach 0.5 i 0.25 i ich interpretacja jako odpowiedzi układu zmiennego rzędu

Zostały przeprowadzone również badania mające na celu dalszą analizę dynamiki otrzymanych modeli analogowych członów całkujących o rzędach 0.5 oraz 0.25. W artykule [II] zostały przedstawione wyniki eksperymentalnej weryfikacji odpowiedzi modeli analogowych o rzędach 0.5 oraz 0.25. Do identyfikacji parametrów została użyta ta sama metoda polegająca na dopasowaniu danych do odpowiedzi teoretycznej zawierającej funkcję Mittag-Lefflera. Teoretyczna odpowiedź układu miała następującą postać:

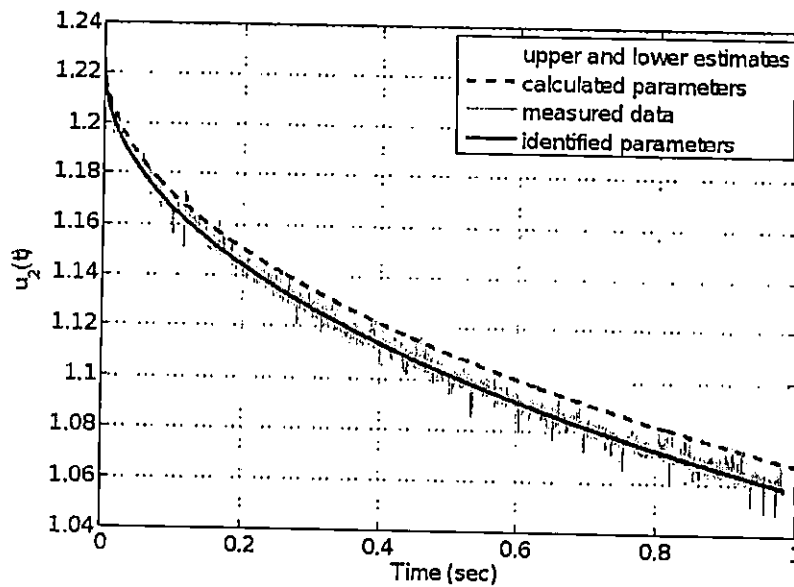
$$y = y_0 E_{\alpha,1}(at^\alpha) \quad (5)$$



Rysunek 3: Zaproponowana metoda modelowania członu całkującego rzędu  $\alpha = 0.25$



Rysunek 4: Wyniki modelowania członu całkującego rzędu 0.25 przy użyciu zaproponowanej metody.

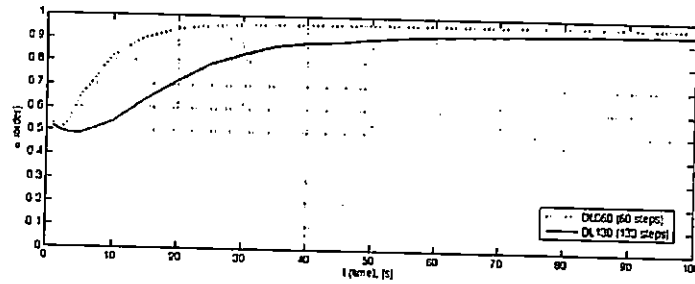


Rysunek 5: Wyniki identyfikacji analogowego układu inercyjnego.

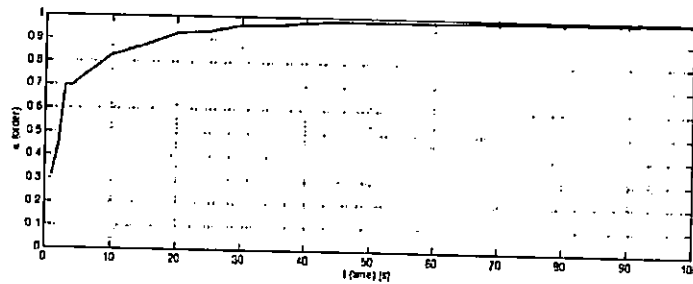
Przyjęta odpowiedź jest rozwiązaniem następującego równania różniczkowego niecałkowitego rzędu:

$${}_0^C D_t^\alpha y(t) - a y(t) = 0, \quad y(0) = y_0. \quad (6)$$

Szukanymi parametrami są zaś:  $\alpha$ ,  $a$ , oraz  $y_0$ .



Rysunek 6: Zmienny rząd  $\alpha(t)$  dla układu drabinkowego rzędu 0.5 i długości implementacji (DL060) – dotted line oraz dla (DL130) – solid line.



Rysunek 7: Zmienny rząd  $\alpha(t)$  dla układu drabinkowego rzędu 0.25 (NL14x14).

Jak można zobaczyć na Rysunkach 6 i 7, im dłuższa implementacja modelu (liczba drabinek) tym wolniej następuje zmiana rzędu (dłużej można obserwować efekt rzędu przypisanego danemu modelowi).

## 7 Modelowanie procesu nagrzewania

Idealny proces nagrzewania jednolitego pręta nieskończenie długiego, bez rozpraszania strumienia ciepłego, opisany jest następującym równaniem różniczkowym cząstkowym:

$$\frac{\partial}{\partial t} T(t, \lambda) = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 T(t, \lambda)}{\partial \lambda^2}. \quad (7)$$

W wyniku rozwiązania takiego równania różniczkowego cząstkowego otrzymujemy następującą relację łączącą strumień ciepły z temperaturą pręta:

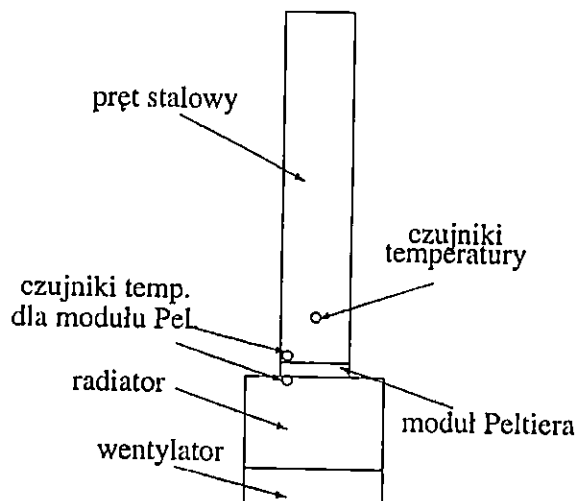
$$H(t, \lambda) = \frac{1}{a} \frac{\partial^{0.5}}{\partial t^{0.5}} T(t, \lambda). \quad (8)$$

Relacja ta jest główną motywacją do użycia rachunku różniczkowego niecałkowitego rzędu do opisu procesu nagrzewania.



## 7.1 Modelowanie procesu nagrzewania w ośrodku jednorodnym

W celu eksperymentalnego potwierdzenia użyteczności modelowania procesu nagrzewania z użyciem rachunku różniczkowego niecałkowitego rzędu zaprojektowałem i zbudowałem stanowisko do badań eksperymentalnych procesu nagrzewania w ośrodku jednorodnym. Wyniki tego modelowania zostały przedstawione w artykule [V]. Schemat budowy stanowiska przedstawiony jest na Rysunku 8.



Rysunek 8: Schemat budowy stanowiska badania procesu nagrzewania w ośrodku jednorodnym

Ze względu na to, iż układ nie jest idealnie izolowany, do opisu modelu wprowadzono czynnik opisujący rozpraszanie strumienia ciepłego do otoczenia układu. Podstawowa relacja pomiędzy strumieniem dla takiego przypadku, ma następującą postać:

$$H(t, \lambda) = \frac{a}{k} \frac{\partial^{0.5}}{\partial t^{0.5}} T(t, \lambda) + \frac{1}{k} T(t, \lambda), \quad (9)$$

co implikuje następującą postać równania różniczkowego cząstkowego niecałkowitego rzędu opisującego proces nagrzewania dla przypadku rozpraszania strumienia ciepłego:

$$\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} T(t, \lambda) = \left(\frac{a}{k}\right)^2 \frac{\partial}{\partial t} T(t, \lambda) + 2 \frac{a}{k^2} \frac{\partial^{0.5}}{\partial t^{0.5}} T(t, \lambda) + \frac{1}{k^2} T(t, \lambda). \quad (10)$$

Bazując na równaniach (10) i (9) otrzymujemy następujący model transmitancyjny opisujący zależność pomiędzy strumieniem ciepłym na początku pręta i temperaturą w punkcie  $\lambda_1$ :

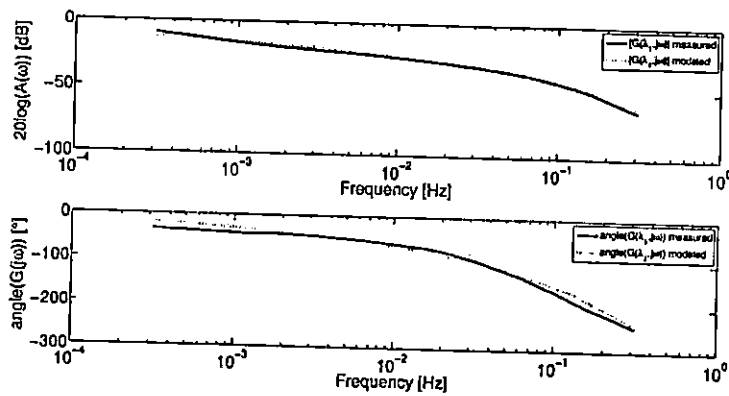
$$G(\lambda_1, s) = \frac{T(\lambda_1, s)}{H(0, s)} = \frac{K}{T_1 s^{0.5} + 1} e^{T_2 s^{0.5}}. \quad (11)$$

Poprzez dopasowanie charakterystyk częstotliwościowych eksperymentalnych i teoretycznych otrzymałem następujące parametry modelu:

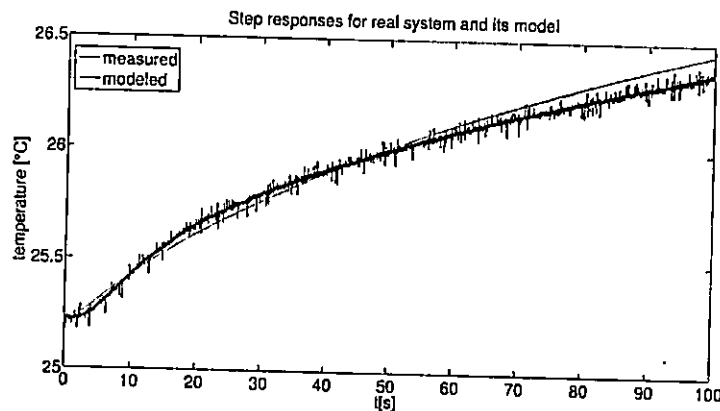
$$K = 3.2, \quad T_1 = 209.27, \quad T_2 = -2.97.$$

Wyniki modelowania w dziedzinie częstotliwości są przedstawione na Rysunku 9.

Wynik walidacji w dziedzinie czasu modelu nagrzewania został przedstawiony na Rysunku 10.



Rysunek 9: Wyniki modelowania w dziedzinie częstotliwości układu nagrzewania w ośrodku jednorodnym



Rysunek 10: Wyniki weryfikacji modelu w dziedzinie czasu

## 7.2 Modelowanie procesu nagrzewania w ośrodku niejednorodnym

Przy modelowaniu z użyciem rachunku różniczkowego niecałkowitego rzędu procesu nagrzewania w ośrodku jednorodnym uzyskałem bardzo wysoką dokładność modelowania. Kolejnym podjętym krokiem była próba modelowania procesu nagrzewania, ale dla ośrodków niejednorodnych. Wyniki modelowania wraz z dokładnym wyprowadzeniem użytego modelu zostały zaprezentowane w pracy [III]. W przypadku ośrodka niejednorodnego proces zachodzący w nim zmienia się z dyfuzji tradycyjnej do dyfuzji anomalnej, a do opisu takiego procesu wymagane jest równanie różniczkowe cząstkowe niecałkowitego rzędu. Dla przyjętego układu, wraz z opisem rozpraszania części strumienia do otoczenia układu, otrzymałem następujące równanie różniczkowe cząstkowe niecałkowitego rzędu:

$$\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} T(t, \lambda) = \left(\frac{b}{k}\right)^2 \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} T(t, \lambda) + 2 \frac{b}{k^2} \frac{\partial^{\frac{\alpha}{2}}}{\partial t^{\frac{\alpha}{2}}} T(t, \lambda) + \frac{1}{k^2} T(t, \lambda). \quad (12)$$

W celu weryfikacji eksperymentalnej otrzymanego modelu matematycznego koniecznym było skonstruowanie stanowiska badawczego. Jego budowa zbliżona jest do układu badawczego dla pręta jednorodnego. W miejsce tego pręta zamocowana jest rurka z umieszczonymi w niej czujnikami, w której można umieszczać dowolny materiał sypki.

Jako materiał niejednorodny w rurze pomiarowej zostały umieszczone następujące materiały:

- 1) śrut przemysłowy (małe stalowe kulki o średnicy 1mm),

2) mieszanina śrutu i kaszy kuskus (o średnicy około 2mm ) w proporcji 1:1.

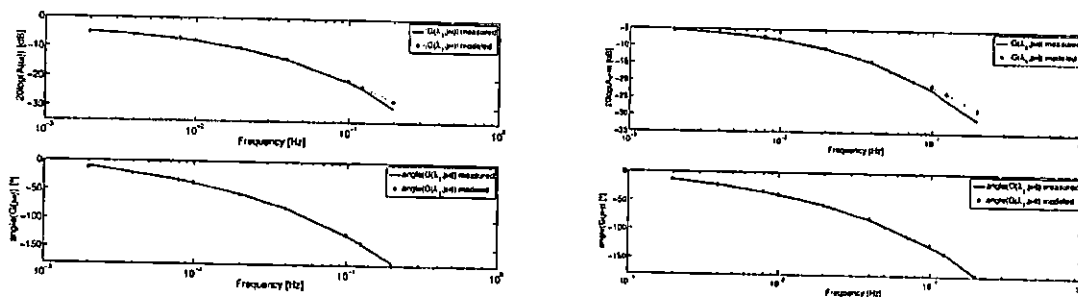
Z matematycznej analizy problemu nagrzewania w ośrodku niejednorodnym, w oparciu o opis dyfuzji anomalnej szczegółowo przedstawiony w pracy [III], została przyjęta następująca postać transmitancji:

$$G(\lambda_1, s) = \frac{T(\lambda_1, s)}{H(0, s)} = \frac{k}{bs^{\frac{\alpha}{2}} + 1} e^{-\lambda_1 \frac{1}{k} (bs^{\frac{\alpha}{2}} + 1)}. \quad (13)$$

Dla pierwszego przypadku (samego śrutu) w wyniku dopasowania charakterystyk częstotliwościowych otrzymałem następujące parametry:

$$k = 0.8209, \quad b = 33.0597, \quad \lambda_1 = 0.2632, \quad \alpha = 1.5558.$$

Wyniki porównania zmierzonych danych z otrzymanym modelem zostały przedstawione na Rysunku 11.



Rysunek 11: Charakterystyki częstotliwościowe zmierzone i zamodelowane dla śrutu (lewy) oraz mieszaniny (prawy).

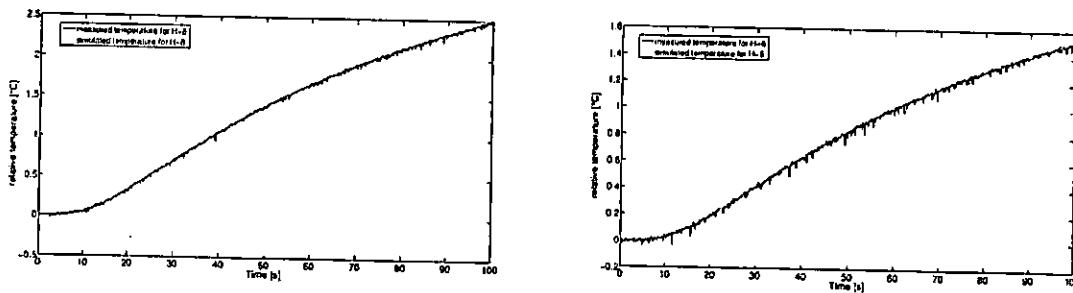
Dla drugiego przypadku (mieszaniny śrutu i kaszy kuskus) w wyniku dopasowania charakterystyk częstotliwościowych zostały otrzymane następujące parametry:

$$k = 0.8661, \quad b = 29.4461, \quad \lambda_1 = 0.2996, \quad \alpha = 1.4928.$$

Jak można zaobserwować na Rysunku 11, osiągnięte rezultaty pokazują bardzo wysoką dokładność modelowania z użyciem modelu niecałkowitego rzędu opartego na procesie dyfuzji anomalnej. Aby jeszcze bardziej potwierdzić dokładność otrzymanego modelu, została przeprowadzona walidacja modelu w dziedzinie czasu. Wyniki walidacji w dziedzinie czasu zostały przedstawione na Rysunku 12. Obydwa rysunki potwierdzają bardzo wysoką dokładność otrzymanego modelu.

## 8 Modelowanie ultrakondensatorów

W swojej pracy badawczej przeprowadziłem także badania z zakresu modelowania ultrakondensatorów z użyciem rachunku różniczkowego niecałkowitego rzędu. Ultrakondensatory są elementami elektronicznymi charakteryzującymi się bardzo dużą pojemnością (rzędu Faradów), przy relatywnie niewielkich rozmiarach. Co więcej, ich sprawność jest znacząco większa niż zwykłych akumulatorów. Jednym z ich ważniejszych ograniczeń jest dość niskie napięcie działania równe około 2.5V dla pojedynczego modułu. Ultrakondensatory zbudowane są zazwyczaj z dwóch elektrod z węgla aktywowanego zanurzonego w elektrolicie, które są przedzielone separatorem. Dla napięcia poniżej napięcia Helmholtz'a nie następuje elektroliza i tworzy się bardzo cienka (o wymiarach atomowych)

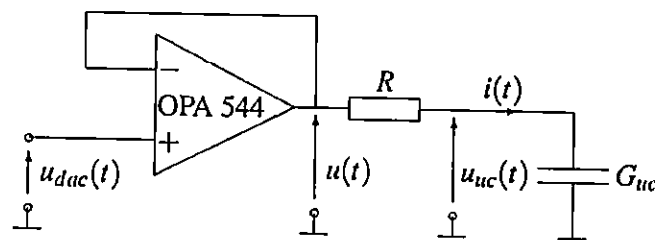


Rysunek 12: Wyniki walidacji modelu w dziedzinie czasu dla układu ze śrutem (lewy) i układu z mieszaniną (prawy).

bariera izolacyjna pomiędzy elektrodą i elektrolitem, co w połączeniu z bardzo dużą powierzchnią (rzędu metrów kwadratowych na gram) skutkuje osiąganiem bardzo dużej pojemności. Energia zaś magazynowana jest – w przeciwieństwie do zwykłych kondensatorów (gdzie magazynowana jest w obrocie dipoli elektrycznych) – w ruchu (dyfuzji) jonów w elektrolicie. Skutkuje to także znacznie bardziej skomplikowanym opisem dynamiki ultrakondensatora, którą ze względu na występujące zjawisko dyfuzji możemy opisywać z użyciem rachunku różniczkowego niecałkowitego rzędu. W pracy [V] przedstawione zostały wyniki modelowania ultrakondensatorów o pojemnościach do 1F.

### 8.1 Modelowanie ultrakondensatorów o pojemnościach poniżej 1F

Na Rys. 13 przedstawiony jest schemat układu eksperymentalnego podłączonego do karty DS1104 Control Card.



Rysunek 13: Układ elektroniczny do badania ultrakondensatorów o pojemnościach poniżej 1F

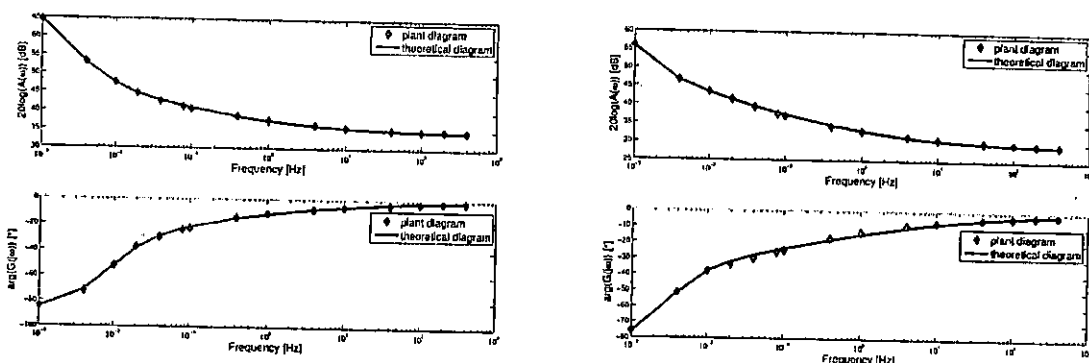
Identyfikacja została przeprowadzona na podstawie dopasowania charakterystyk częstotliwościowych Bode'go zebranych eksperymentalnie i otrzymanych z założonego modelu. Teoretyczny model części pojemnościowej ultrakondensatora został przyjęty jako:

$$G_{uc}(s) = \frac{(Ts + 1)^\alpha}{Cs}, \quad (14)$$

natomiast pełny model ultrakondensatora, zawierający dodatkowo rezystancję elektrod  $R_c$  i rezystancję samorozładowania  $R$ , dany jest następująco:

$$G_{uc}(s) = \frac{U_{uc}(s)}{I(s)} = R_c + \frac{(Ts + 1)^\alpha}{\frac{1}{R}(Ts + 1)^\alpha + Cs}. \quad (15)$$

Porównanie wyników eksperymentalnych i modelowania, dla ultrakondensatorów o pojemnościach 0.1F i 0.33F przedstawione jest na Rys. 14.



Rysunek 14: Porównanie wyników eksperymentalnych i modelowania dla ultrakondensatorów o pojemnościach 0.1F (lewy) i 0.33F (prawy)

## 8.2 Modelowanie ultrakondensatorów o większych pojemnościach

Do modelowania ultrakondensatorów o większych pojemnościach, przedstawionych w artykule [IV], został zbudowany specjalny układ energo-elektroniczny oparty na pełnym mostku-H zbudowanym na tranzystorach MOSFET (mogący sterować do 100A prądu ładowania i rozładowania) i podłączony do karty DS1104. Do badań zostały użyte ultrakondensatory firmy Maxwell® o pojemnościach 1500F/2.7V (BCAP1500) i 3000F/2.7V (BCAP3000).

Założony model części pojemnościowej ultrakondensatora jest następujący:

$$G_c(s) = \frac{(Ts + 1)^\alpha}{Cs}$$

Całociowy model ultrakondensatora dany jest jako:

$$G_{uc}(s) = \frac{U_{uc}(s)}{I(s)} = R_c + G_c(s). \quad (16)$$

Na Rys. 15 przedstawione są wyniki modelowania ultrakondensatora o pojemności 1500F, gdzie można zauważyć, że modelowanie z użyciem rachunku różniczkowego niecałkowitego rzędu daje bardzo dokładne wyniki.

## 8.3 Porównanie wyników dla różnych modeli

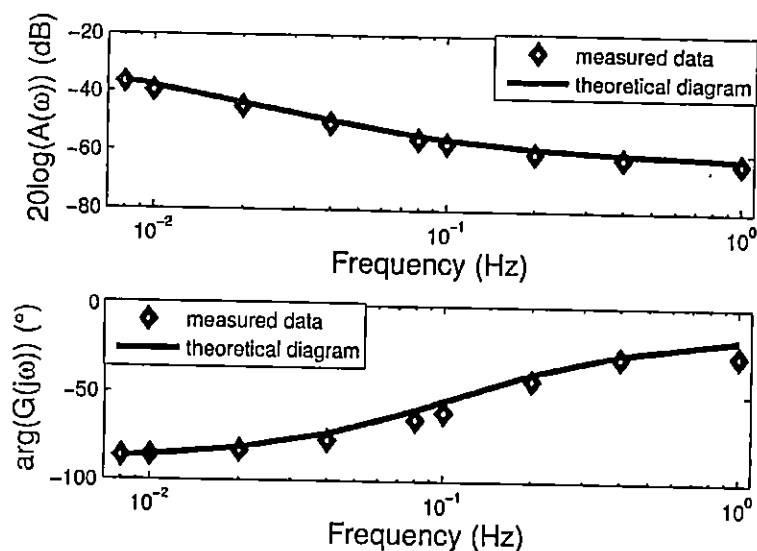
Do porównania wyników modelowania, zaprezentowanego w pracy [IV], wybrane zostały następujące modele pojemności:

$$G_{c1}(s) = \frac{1}{Cs}, \quad G_{c2}(s) = \frac{1}{Cs^\alpha}, \quad G_{c3}(s) = \frac{(Ts+1)^\alpha}{Cs}$$

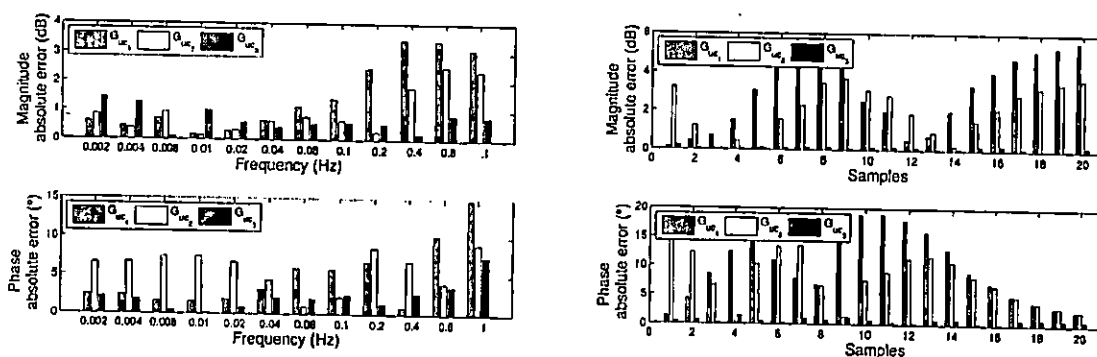
Pierwszy jest tradycyjnym modelem kondensatora (pierwszego rzędu), pozostałe są modelami niecałkowitego rzędu. Cały model ultrakondensatora dany jest następująco:

$$G_{uci}(s) = \frac{U_{uc}(s)}{I(s)} = R_c + G_{ci}(s). \quad (17)$$

Wyniki porównania modeli zostały przedstawione na Rys. 16. Jak można na nim zauważyć, najdokładniejszym modelem okazał się trzeci model (Davidsona-Cole), a największe błędy otrzymano dla modelu całkowitego rzędu (szczególnie dla wyższych częstotliwości).



Rysunek 15: Zmierzona and zamodelowana charakterystyka Bode'go ultrakondensatora 1500F



Rysunek 16: Błąd identyfikacji ultrakondensatorów 1500F (lewy) i 0.33F (prawy) dla różnych modeli

### 8.4 Znaczenie parametru $T$

Znaczenie parametru  $T$ , które zostało przedstawione w [V], wyjaśnia bardzo ważną własność ultrakondensatorów, która jest zaprezentowana poniżej.

Transmitancja widmowa części pojemnościowej, danej transmitancją  $G_{C_3}(s)$  jest następująca:

$$G_c(j\omega) = \frac{(Tj\omega + 1)^\alpha}{Cj\omega}$$

Moduł transmitancji widmowej dany jest

$$A_c(\omega) = \frac{((T\omega)^2 + 1)^\alpha}{C\omega}$$

oraz może być porównany z modulem transmitancji widmowej tradycyjnego kondensatora

$$\frac{((T\omega)^2 + 1)^\alpha}{C\omega} = \frac{1}{C'\omega}, \quad (18)$$

skąd otrzymujemy

$$C' = \frac{C}{((T\omega)^2 + 1)^\alpha}, \quad (19)$$

gdzie  $C'$  jest pojemnością ekwiwalentną ultrakondensatora dla danej częstotliwości  $\omega$ . Ekwiwalent ten opisuje, jaką pojemność powinien mieć tradycyjny ultrakondensator, aby mieć taki sam moduł jak ultrakondensator ma dla danej częstotliwości.

Dla  $\alpha = 0.5$  otrzymujemy

$$C' = \begin{cases} C & \text{for } \omega \ll \frac{1}{T} \\ \frac{C}{T\omega} & \text{for } \omega \gg \frac{1}{T} \end{cases} \quad (20)$$

Częstotliwość  $f_c$  dla której ekwiwalent pojemności spada  $\sqrt{2}$  razy dany jest następująco

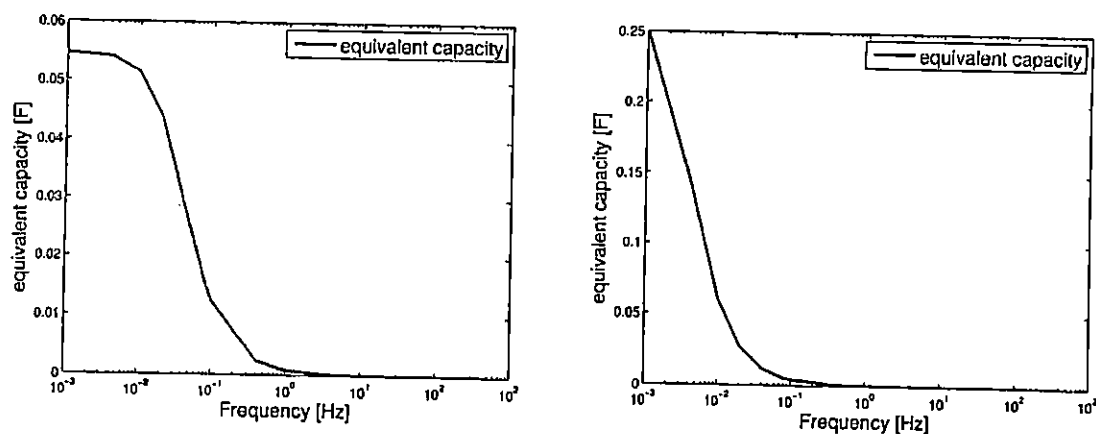
$$f_c = \frac{1}{2\pi T}. \quad (21)$$

Tabela 2 przedstawia wyniki otrzymanych parametrów  $T$  i częstotliwości  $f_c$  dla różnych ultrakondensatorów. Jak można zauważyć, parametry te są różne dla różnych ultrakondensatorów.

Tablica 2

capacitor	$T$	$f_c$ [Hz]
0.047F	5.1138	0.0311
0.1F	13.6628	0.0117
0.33F	52.7674	0.0030

Rys. 17 przedstawia wykresy ekwiwalentu pojemności, czyli pojemności, jaką miałby tradycyjny kondensator dla danej częstotliwości, przy zachowaniu tego samego modułu transmitancji widmowej (wzmocnienie), dla różnych ultrakondensatorów. Jak można zauważyć, ekwiwalent pojemności bardzo silnie zależy od częstotliwości. Jest to bardzo ważna własność, która może być w przyszłości używana przez inżynierów podczas projektowania układów w ultrakondensatorami.



Rysunek 17: Ekwiwalent pojemności  $C'$  ultrakondensatorów o pojemnościach 0.047F (lewy) i 0.33F (prawy)

## 8.5 Modelowanie ultrakondensatora modelem dyskretnym

Dla identyfikacji parametrycznej ultrakondensatora przedstawionej w [V], została wzięta pod uwagę następująca dyskretna transmitancja niecałkowitego rzędu:

$$G(z) = \frac{b_2 z^2 \Delta^1(z) + b_1 z \Delta^{0.5}(z) + b_0}{z^2 \Delta^1(z) + a_1 z \Delta^{0.5}(z) + a_0}, \quad (22)$$

co może być zapisane w następującej postaci:

$$\varphi_k = [-\Delta^{0.5} y_{k+1}, -y_k, \Delta^1 u_k \Delta^{0.5} u_{k+1}, u_k], \quad (23)$$

$$\theta^T = [a_1 \ a_0 \ b_2 \ b_1 \ b_0], \quad (24)$$

$$Y_k = [\Delta^1 y_k]. \quad (25)$$

Możemy to zapisać w postaci następującego układu równań

$$\begin{bmatrix} Y_k \\ Y_{k-1} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_k \\ \varphi_{k-1} \\ \vdots \end{bmatrix} \theta. \quad (26)$$

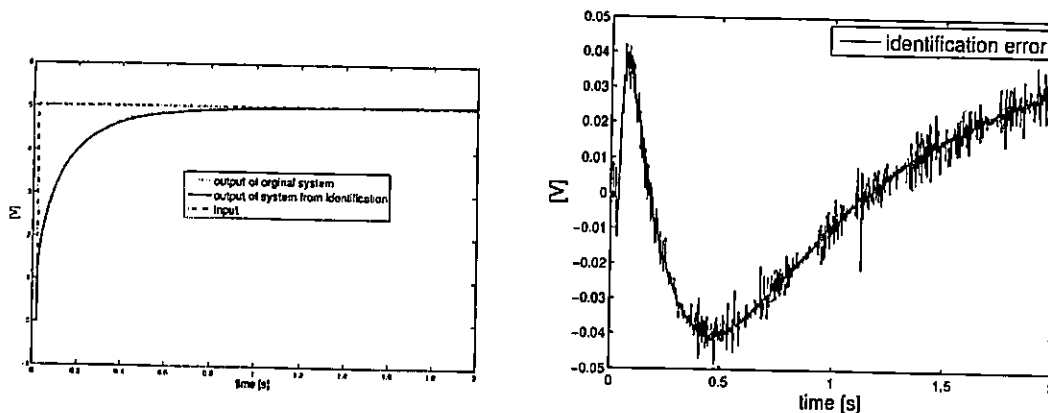
Przez rozwiązanie układu równań (26) otrzymujemy następujące parametry dyskretnego modelu:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.006333 & -0.037401 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C = [0.025055 \ 0.004997], D = [0.227795],$$

$$\alpha = 0.5$$

Porównanie pomiędzy zmierzonymi odpowiedziami i odpowiedzią układu zidentyfikowanego przedstawione jest na Rys. 18. Jak można zauważyć, model dyskretny niecałkowitego rzędu bardzo dokładnie opisuje dynamikę ultrakondensatora.



Rysunek 18: Porównanie odpowiedzi skokowej ultrakondensatora i zidentyfikowanego modelu; odpowiedzi (lewy), błąd (prawy)



## 9 Estymacja dyskretnych układów niecałkowitego rzędu

W rozdziale tym zostaną przedstawione wyniki z zakresu estymacji układów niecałkowitego rzędu, które zostały zawarte w pracach [VI] i [VII].

### 9.1 Zmodyfikowany algorytm Ułamkowego Filtru Kalmana

Tradycyjny Ułamkowy Filtr Kalmana opisany w pracy [14] zawierał pewne konieczne założenia, które mogły mieć wpływ na dokładność estymacji. Założenia użyte przy wyprowadzaniu Ułamkowego Filtru Kalmana były następujące:

1.  $E[x_{k+1-j}, z_k^*] \approx E[x_{k+1-j}, z_{k+1-j}^*]$  dla  $i = 1 \dots (k+1)$ .
2.  $E[(\hat{x}_l - x_l)(\hat{x}_m - x_m)^T] = 0$ , gdy  $l \neq m$ .

A sam algorytm filtru dany był następująco:

**Twierdzenie 1** [14] *Algorytm filtru Kalmana dla dyskretnego układu niecałkowitego rzędu opisanego w przestrzeni stanu (ang. Fractional Kalman Filter, FKF) dany jest przez następujące równania*

$$\Delta^Y \bar{x}_{k+1} = A \hat{x}_k + B u_k \quad (27)$$

$$\bar{x}_{k+1} = \Delta^Y \bar{x}_{k+1} - \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j \Upsilon_j \hat{x}_{k+1-j} \quad (28)$$

$$\bar{P}_k = (A + \Upsilon_1) P_{k-1} (A + \Upsilon_1)^T + Q_{k-1} + \sum_{j=2}^k \Upsilon_j P_{k-j} \Upsilon_j^T \quad (29)$$

$$\hat{x}_k = \bar{x}_k + K_k (y_k - C \bar{x}_k) \quad (30)$$

$$P_k = (I - K_k C) \bar{P}_k \quad (31)$$

gdzie

$$K_k = \bar{P}_k C^T (C \bar{P}_k C^T + R_k)^{-1}$$

przy warunkach początkowych

$$x_0 \in \mathbb{R}^N, \quad P_0 = E[(\hat{x}_0 - x_0)(\hat{x}_0 - x_0)^T]$$

oraz  $v_k$  i  $\omega_k$  zakładamy, że są szumami niezależnymi o zerowej wartości średniej. ■

Przyjęte założenia skutkowały tym, że w każdym kroku przeszłe wektory estymat nie były aktualizowane przy użyciu nowych danych pomiarowych. Aby złagodzić te założenia, wprowadziłem następujący zapis dyskretnego układu niecałkowitego rzędu opisanego w przestrzeni stanu.

**Definicja 1** *Liniowy dyskretny układ niecałkowitego rzędu opisany w przestrzeni stanu zapisany w postaci m-skończonej zdefiniowany jest następująco*

$$\mathbb{X}_{k+1} = \mathbb{A}_m \mathbb{X}_k + \mathbb{B}_m u_k + \mathbb{I} \omega_k - \mathbb{I} \sum_{j=m+1}^{k+1} (-1)^j \Upsilon_j x_{k+1-j} \quad (32)$$

$$y_k = \mathbb{C}_m \mathbb{X}_k \quad (33)$$

gdzie

$$\mathbb{X}_k = \begin{bmatrix} x_k \\ x_{k-1} \\ \vdots \\ x_{k-m+1} \end{bmatrix}, \quad \mathbb{I} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{A}_m = \begin{bmatrix} (A + \Upsilon_1) & -(-1)^2 \Upsilon_2 & \dots & -(-1)^m \Upsilon_m \\ I & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & I & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{B}_m = \begin{bmatrix} B \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{C}_m = [C \ 0 \ \dots \ 0]$$

oraz  $I \in \mathbb{R}^{N \times N}$  jest macierzą jednostkową.

Dla tak zdefiniowanego układu wprowadziłem zmodyfikowany algorytm ułamkowego filtra Kalmana zwany ExFKF:

**Twierdzenie 2** Dla liniowego dyskretnego układu niecałkowitego rzędu opisanego w przestrzeni stanu zapisanego w postaci  $m$ -skończonej, danego Definicją 1, Zmodyfikowany Ułamkowy Filtr Kalmana (nazwany ExFKF) dany jest następująco:

$$\tilde{\mathbb{X}}_{k+1} = \mathbb{A}_m \tilde{\mathbb{X}}_k + \mathbb{B}_m u_k - \mathbb{I} \sum_{j=m+1}^{k+1} (-1)^j \Upsilon_j \hat{x}_{k+1-j} \quad (34)$$

$$\tilde{\mathbb{P}}_k = \mathbb{A}_m \mathbb{P}_{k-1} \mathbb{A}_m^T + \mathbb{Q}_{k-1} + \sum_{j=m+1}^k \mathbb{I} \Upsilon_j \mathbb{P}_{k-j} \Upsilon_j^T \mathbb{I}^T \quad (35)$$

$$\hat{\mathbb{X}}_k = \tilde{\mathbb{X}}_k + \mathbb{K}_k (y_k - \mathbb{C}_m \tilde{\mathbb{X}}_k) \quad (36)$$

$$\mathbb{P}_k = (\mathbb{I} - \mathbb{K}_k \mathbb{C}_m) \tilde{\mathbb{P}}_k \quad (37)$$

gdzie

$$\mathbb{K}_k = \tilde{\mathbb{P}}_k \mathbb{C}_m^T (\mathbb{C}_m \tilde{\mathbb{P}}_k \mathbb{C}_m^T + R_k)^{-1}$$

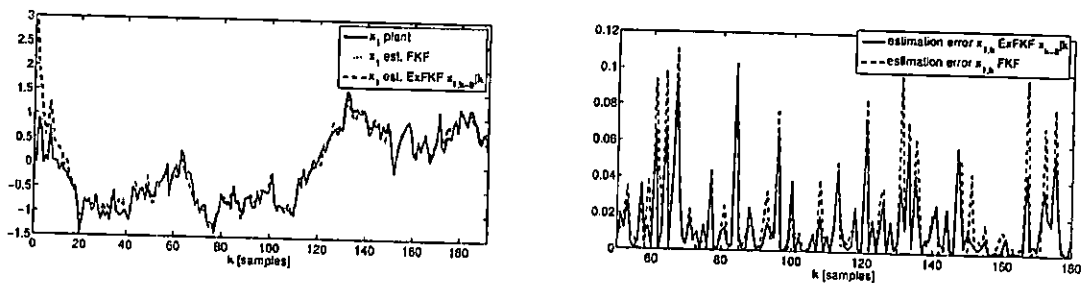
$$\mathbb{I} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{Q}_k = \mathbb{I} Q_k \mathbb{I}^T$$

$$\mathbb{P}_k = \begin{bmatrix} P_{k,k} & P_{k,k-1} & \dots & P_{k,k-m} \\ P_{k-1,k} & P_{k-1,k-1} & \dots & P_{k-1,k-m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{k-m,k} & P_{k-m,k-1} & \dots & P_{k-m,k-m} \end{bmatrix}$$

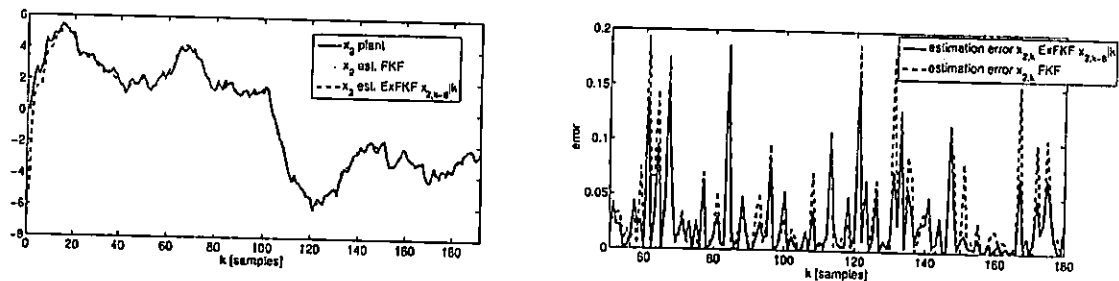
przy warunkach początkowych

$$\hat{\mathbb{X}}_0 \in \mathbb{R}^{mN}, \quad \mathbb{P}_0 = E[(\hat{\mathbb{X}}_0 - \mathbb{X}_0)(\hat{\mathbb{X}}_0 - \mathbb{X}_0)^T]$$

, gdzie szumy  $v_k$  i  $\omega_k$  są z założenia nieskorelowane oraz o zerowej wartości średniej, a macierze  $\mathbb{P}_k$  and  $R_k$  są dodatnio-określone. ■



Rysunek 19: Wyniki estymacji (lewy) oraz błędu estymacji (prawy) algorytmów FKF oraz ExFKF dla pierwszej zmiennej stanu  $x_{1,k}$



Rysunek 20: Wyniki estymacji (lewy) oraz błędu estymacji (prawy) algorytmów FKF oraz ExFKF dla drugiej zmiennej stanu  $x_{2,k}$

Algorytm ten pozwala na określenie, jak dużo poprzednich wektorów estymat będzie uaktualnianych w każdym kroku estymacji, bazując na aktualnych danych. Ilość tych wektorów stanu określana jest przez liczbę  $m$ . Algorytm ten, wraz z przykładami symulacji numerycznych, został zaprezentowany w artykule [VI].

Jedną z ważnych zalet nowego algorytmu jest połączenie akcji estymacji i wygładzania (ang. smoothing). Główny wektor  $x_k$  zawiera i uaktualnia  $(m - 1)$  ostatnich wektorów stanu,

$$\hat{x}_k|k = \begin{bmatrix} \hat{x}_k|k \\ \hat{x}_{k-1}|k \\ \vdots \\ \hat{x}_{k-m}|k \end{bmatrix}, \quad (38)$$

gdzie  $\hat{x}_k|k$  jest wynikiem estymacji, a wektory  $\hat{x}_{k-j}|k$  są wektorami wygładzania (uaktualnienia są otrzymane przy użyciu  $j - th$  przyszyłych danych).

## 9.2 Algorytmy Ułamkowego Filtru Kalmana dla estymacji poprzez sieć transmisyjną

Podczas estymacji, w której dane do estymacji są przesyłane poprzez sieć komputerową może nastąpić utrata pakietów, a przez to części informacji biorącej udział w procesie estymacji. Sama informacja o tym, czy pakiet został utracony staje się ważną własnością i także może być używana przy procesie estymacji. Wyniki generalizacji Ułamkowego Filtru Kalmana (FKF) oraz jego zmodyfikowanej wersji (ExFKF) na przypadek estymacji poprzez sieć zostały przedstawione w artykule [VI].

**Twierdzenie 3** Dla dyskretnego układu niecałkowitego rzędu opisanego w przestrzeni stanu z pomiarami poprzez sieć Ułamkowy Filtr Kalmana (nazywany gFKF) dany jest następująco:

$$\Delta^Y \bar{x}_{k+1} = A\hat{x}_k + Bu_k \quad (39)$$

$$\bar{x}_{k+1} = \Delta^Y \bar{x}_{k+1} - \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j \Upsilon_j \hat{x}_{k+1-j} \quad (40)$$

$$\bar{P}_k = (A + \Upsilon_1) P_{k-1} (A + \Upsilon_1)^T + Q_{k-1} + \sum_{j=2}^k \Upsilon_j P_{k-j} \Upsilon_j^T \quad (41)$$

$$\hat{x}_k = \bar{x}_k + \gamma_k K_k (y_k - C\bar{x}_k) \quad (42)$$

$$P_k = (I - \gamma_k K_k C) \bar{P}_k \quad (43)$$

gdzie  $\gamma_k$  reprezentuje wiedzę o utracie pakietów

$$K_k = \bar{P}_k C^T (C \bar{P}_k C^T + R_k)^{-1}$$

z warunkami początkowymi

$$x_0 \in \mathbb{R}^N, \quad P_0 = E[(\bar{x}_0 - x_0)(\bar{x}_0 - x_0)^T]$$

oraz  $v_k$  i  $\omega_k$  są szumami nieskorelowanymi o zerowej wartości średniej. ■

**Twierdzenie 4** Dla dyskretnego układu niecałkowitego rzędu opisanego w przestrzeni stanu z pomiarami poprzez sieć zmodyfikowany Ułamkowy Filtr Kalmana (nazywany gExFKF) dany jest następująco:

$$\bar{X}_{k+1} = A_m \hat{X}_k + B_m u_k - \Pi \sum_{j=m+1}^{k+1} (-1)^j \Upsilon_j \hat{x}_{k+1-j} \quad (44)$$

$$\bar{P}_k = A_m P_{k-1} A_m^T + Q_{k-1} + \sum_{j=m+1}^k \Pi \Upsilon_j P_{k-j} \Upsilon_j^T \Pi^T \quad (45)$$

$$\hat{X}_k = \bar{X}_k + \gamma_k K_k (y_k - C_m \bar{X}_k) \quad (46)$$

$$P_k = (I - \gamma_k K_k C_m) \bar{P}_k \quad (47)$$

gdzie

$$K_k = \bar{P}_k C_m^T (C_m \bar{P}_k C_m^T + R_k)^{-1}$$

oraz  $\gamma_k$  reprezentuje wiedzę o utracie pakietów.  $v_k$  i  $\omega_k$  są szumami nieskorelowanymi o zerowej wartości średniej, a macierze  $\bar{P}_k$  i  $R_k$  są dodatnio-określone. ■

Dla zbadania efektywności wprowadzonych algorytmów zostały przeprowadzone symulacje numeryczne, których wyniki pokazane są w Tabelach 3, 4, 5. Jak można na nich zauważyć, algorytmy używające informacji o braku pakietów, okazały się dawać znacznie dokładniejsze wyniki estymacji. Co więcej, ich efektywność rosła wraz ze wzrostem ilości utraconych pakietów.

Tablica 3: Wyniki estymacji dla algorytmów FKF oraz gFKF dla różnych wartości współczynnika utraty pakietów  $r$

$r$	1	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3
$e_{FKF}$	15.66	18.54	22.49	28.91	34.48	45.14	60.44	72.42
$e_{gFKF}$	15.66	17.78	20.22	25.04	28.92	39.37	49.97	53.33
$e\%$	0	4.12	10.08	13.41	16.14	12.77	17.31	26.36

Tablica 4: Wyniki estymacji dla algorytmów FKF oraz gExFKF (dla  $r = 0.7$ )

Typ szumu	FKF	gExFKF algorytm							
	Estymacja	Estymacja		Wygładzanie					
		$\hat{x}_k k$		$\hat{x}_{k-1} k$		$\hat{x}_{k-4} k$		$\hat{x}_{k-8} k$	
	$e$	$e$	$e\%$	$e$	$e\%$	$e$	$e\%$	$e$	$e\%$
I	12.24	10.33	15.56	8.16	33.34	7.25	40.79	7.18	41.35
II	28.91	24.18	16.36	19.22	33.51	17.40	39.82	17.31	40.14
III	31.17	26.01	16.54	24.37	21.82	23.92	23.26	23.79	23.67
IV	112.52	89.30	20.63	77.23	31.37	75.53	32.87	75.29	33.09

Tablica 5: Wyniki estymacji dla algorytmów gFKF oraz gExFKF (dla  $r = 0.7$ )

Typ szumu	gFKF	gExFKF algorytm							
	Estymacja	Estymacja		Wygładzanie					
		$\hat{x}_k k$		$\hat{x}_{k-1} k$		$\hat{x}_{k-4} k$		$\hat{x}_{k-8} k$	
	$e$	$e$	$e\%$	$e$	$e\%$	$e$	$e\%$	$e$	$e\%$
I	10.81	10.33	4.37	8.16	24.52	7.25	32.95	7.18	33.58
II	25.04	24.18	3.41	19.22	23.21	17.40	30.50	17.31	30.87
III	26.25	26.01	0.88	24.37	7.16	23.92	8.87	23.79	9.34
IV	86.96	89.30	-2.69	77.23	11.20	75.53	13.14	75.29	13.43

### 9.3 Estymacja układów z szumami niecałkowitego rzędu

W artykule [VII] przedstawiony jest algorytm estymacji zmiennych stanu dla przypadku układów z szumami o korelacji dynamicznej niecałkowitego rzędu.

Szum o korelacji dynamicznej całkowitego rzędu, zwany również szumem kolorowym, dany jest następującą relacją:

$$\mu_{k+1} = f' \mu_k + \omega_k, \quad (48)$$

gdzie  $\mu_k \in \mathbb{R}$  jest szumem o korelacji dynamicznej,  $f' \in \mathbb{R}$  jest parametrem tego szumu i  $\omega_k \in \mathbb{R}$  jest szumem nieskorelowanym dynamicznie (źródłowym), na przykład, białym szumem Gausa. Relacja ta może zostać zapisana w następującej formie:

$$\Delta^1 \mu_{k+1} = f \mu_k + \omega_k, \quad (49)$$

gdzie  $f = f' - 1$ . To wyrażenie może zostać uogólnione dla przypadku szumu o korelacji dynamicznej niecałkowitego rzędu, który dany jest następująco:

$$\Delta^\alpha \mu_{k+1} = f \mu_k + \omega_k, \quad (50)$$

gdzie  $\mu_k$  jest szumem o korelacji dynamicznej niecałkowitego rzędu (kolorowym niecałkowitego rzędu),  $\alpha$  jest niecałkowitym rzędem szumu i  $\omega_k$  jest źródłowym szumem nieskorelowanym dynamicznie.

Rozważmy teraz dyskretny układ dynamiczny niecałkowitego rzędu z szumem o korelacji dynamicznie niecałkowitego rzędu. W takim przypadku równania układu będą mieć następującą postać:

$$\Delta^\Gamma x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + \mu_k, \quad (51)$$

gdzie szum kolorowy niecałkowitego rzędu dany jest następująco:

$$\Delta^\Lambda \mu_{k+1} = F \mu_k + \omega_k, \quad (52)$$

oraz  $\omega_k$  jest szumem dynamicznie nieskorelowanym i  $\Lambda$  dana jest następująco:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{bmatrix}.$$

Taki układ może być zapisany w następującej postaci:

$$\Delta^\Gamma x_{k+1}^* = A^* x_k^* + B^* u_k + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \mu_k, \quad (53)$$

$$x_{k+1}^* = \Delta^\Gamma x_{k+1}^* - \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j \Upsilon_j^* x_{k+1-j}^*, \quad (54)$$

$$y_k = C^* x_k^* + v_k, \quad (55)$$

gdzie

$$x_{k+1}^* = \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ \mu_k \end{bmatrix}, \quad A^* = \begin{bmatrix} A & I \\ 0 & F \end{bmatrix}, \quad B^* = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C^* = [C \ 0], \quad \Upsilon^* = \begin{bmatrix} \Upsilon \\ \Lambda \end{bmatrix}.$$

Dla tak zdefiniowanego układu możemy zapisać Układowy Filtr Kalmana z następującą postacią macierzy kowariancji szumu systemowego:

$$Q^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix},$$

### 9.3.1 Estymacja układów z szumami niecałkowitego zmiennego rzędu

W artykule [VII] został także pokazany algorytm estymacji układu z szumami kolorowymi niecałkowitego zmiennego rzędu. Szum kolorowy niecałkowitego zmiennego rzędu dany jest następująco:

$$\Delta^{\alpha_{k+1}} \mu_{k+1} = f \mu_k + \omega_k, \quad (57)$$

gdzie  $\mu_k$  jest teraz szumem kolorowym niecałkowitego zmiennego rzędu,  $\alpha_k$  jest zmiennym rzędem tego szumu i  $\omega_k$  jest nieskorelowanym szumem źródłowym.

Dla przypadku zmiennego rzędu układ dyskretny opisany w przestrzeni stanu z szumem kolorowym niecałkowitego zmiennego rzędu dany jest następująco:

$$\Delta^{\gamma_{k+1}} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + \mu_k, \quad (58)$$

$$x_{k+1} = \Delta^{\gamma_{k+1}} x_{k+1} - \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j \Upsilon_{j,k+1} x_{k+1-j}, \quad (59)$$

$$y_k = Cx_k + v_k, \quad (60)$$

gdzie szum kolorowy zmiennego rzędu opisany jest relacją

$$\Delta^{\alpha_{k+1}} \mu_{k+1} = F \mu_k + \omega_k. \quad (61)$$

Co może być zapisane w analogicznej do przypadku stałego rzędu formie:

$$\Delta^{\gamma_{k+1}^*} x_{k+1}^* = A^* x_k^* + B^* u_k + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \omega_k, \quad (62)$$

$$x_{k+1}^* = \Delta^{\gamma_{k+1}^*} x_{k+1}^* - \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j \Upsilon_{j,k+1}^* x_{k+1-j}^*, \quad (63)$$

$$y_k = C^* x_k^* + v_k, \quad (64)$$

gdzie

$$x_{k+1}^* = \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ \omega_k \end{bmatrix}, \quad A^* = \begin{bmatrix} A & I \\ 0 & F \end{bmatrix}, \quad B^* = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C^* = [C \ 0], \quad \Upsilon_{k+1}^* = \begin{bmatrix} \Upsilon_{k+1} \\ \alpha_{k+1} \end{bmatrix}.$$

Dla tak przedefiniowanego układu możemy zapisać Ułamkowy Filtr Kalmana, podobnie jak dla przypadku stałego rzędu.

#### Przykład

Aby lepiej zaprezentować wpływ szumu zmiennego rzędu, założmy następujący układ stałego rzędu z szumem zmiennego rzędu, danego następującymi macierzami:

$$A = [-1.5], \quad B = [1], \quad C = [2], \quad \Upsilon = [1]$$

Szum o korelacji dynamicznej niecałkowitego zmiennego rzędu dany jest następująco:

$$\Delta^{\alpha_{k+1}} v_{k+1} = \omega_k.$$

Zmienny rząd szumu został wybrany jako  $\alpha_k = 0.5 + 0.2 \sin(0.006k)$ . Wariancja szumu nieskorelowanego dynamicznie (źródłowego)  $\omega_k$  jest równa 1.06. Zmierzona wariancja szumu pomiarowego

Tablica 6: Wyniki estymacji układu całkowitego rzędu z szumem niecałkowitego zmiennego rzędu

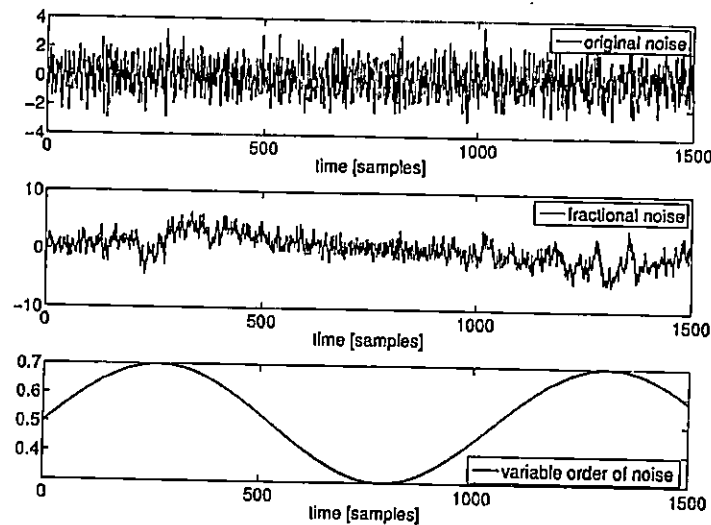
wariancja szumu niecałkowitego rzędu	$var_{VOFKF}$	$var_{cVOFKF}$	$var_{cFKF}$	$\delta_{imp-cVOFKF}$ [%]	$\delta_{imp-cFKF}$ [%]
3.97	4.24	3.81	4.16	10.12	1.86

(nieskorelowanego) jest równa 4. Obydwa szумы są o zerowej wartości średniej. Dla ułatwienia porównania zostały zdefiniowane następujące wskaźniki

$$\delta_{imp-cVOFKF} = 100\% \frac{var_{VOFKF} - var_{cVOFKF}}{var_{VOFKF}}$$

$$\delta_{imp-cFKF} = 100\% \frac{var_{VOFKF} - var_{cFKF}}{var_{VOFKF}}$$

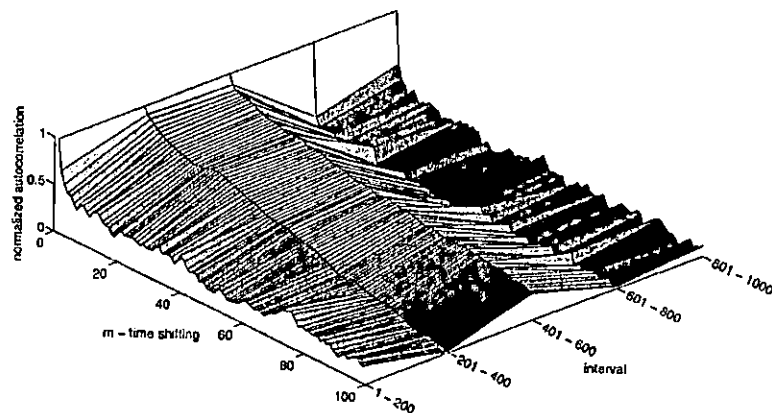
W Tabeli 6 zawarte są przykładowe wyniki estymacji danego układu algorytmem cVOFKF. Wyniki te są porównane z analogicznymi rezultatami otrzymanymi przy użyciu Ułamkowego Filtru Kalmana (VOFKF) (bez użycia informacji o korelacji dynamicznej szumu) oraz zaproponowanego Ułamkowego Filtru Kalmana dla szumów niecałkowitego rzędu (cFKF), ale z założeniem, że rząd jest stały równy wartości średniej rzędu zmiennego. Jak można zauważyć, zaproponowany algorytm Ułamkowego Filtru Kalmana dla szumu niecałkowitego zmiennego rzędu jest najdokładniejszy. Co więcej, wyniki VOFKF i cFKF są na porównywalnym poziomie i są znacząco gorsze niż otrzymane dla cVOFKF. Pokazuje to czytelnie, że zmienny rząd ma bardzo duże znaczenie przy estymacji układu i nie może być zaniedbywany, czy też przybliżany, jako wartość średnia zmiennego rzędu.



Rysunek 21: Przykładowy szum źródłowy (original noise), odpowiadający mu szum niecałkowitego zmiennego rzędu (fractional noise) i zmienny rząd (variable order).

Rysunek 21 przedstawia szum źródłowy, odpowiadający mu szum zmiennego rzędu oraz wartości zmiennego rzędu. Natomiast Rysunek 22 przedstawia bardziej zaawansowaną analizę szumu niecałkowitego rzędu, przedstawiając wartości autokorelacji szumu w poszczególnych interwałach czasowych. Jak można zauważyć zmienność rzędu szumu powoduje jego niestacjonarność, a wariancja szumu zmienia się w czasie.





Rysunek 22: Autokorelacja dla przedziałów czasowych szumu niecałkowitego zmiennego rzędu.

## 10 Podsumowanie

Bardzo ważnym osiągnięciem przedstawionych prac było opracowanie zmodyfikowanej metody analogowej realizacji impedancji rzędów 0.5 i 0.25. Metoda ta, w przeciwieństwie do istniejących, umożliwiła bardzo dokładną realizację tych impedancji z elementów ogólnodostępnych. Zrealizowane w ten sposób impedancje i zbudowane z ich użyciem układy całkujące umożliwiły przeprowadzenie dokładnych i zaawansowanych badań nad dynamiką układów niecałkowitego rzędu. Szczególnie ważną obserwacją była analiza dynamiki układów całkujących jako zachowania charakterystycznego dla układów zmiennego rzędu. Wyniki tych badań umożliwiły lepsze poznanie dynamiki układów niecałkowitego rzędu i może być użyta w dalszych badaniach z tego zakresu, jak i do budowy modeli analogowych złożonych liniowych i nieliniowych układów niecałkowitego rzędu, czy też regulatorów PID niecałkowitego rzędu.

Następnym osiągnięciem przedstawionych prac było przygotowanie części eksperymentalnej, przeprowadzenie eksperymentu oraz otrzymanie wyników modelowania procesu nagrzewania. Prace te zostały przeprowadzone zarówno dla ośrodka jednorodnego, jak i niejednorodnego. Przeprowadzone badania eksperymentalne pokazały potrzebę analizy wpływu rozpraszania do otoczenia strumienia cieplnego, co doprowadziło do otrzymania równania różniczkowego cząstkowego niecałkowitego rzędu. Otrzymany w ten sposób model okazał się bardzo dokładny zarówno w dziedzinie częstotliwości, jak i czasu. Wyniki takiego modelowania, przedstawione w artykule [III], zostały uznane za szczególnie ważne i artykuł ten został przedstawiony w FDA Express Vol. 9, No. 5, Dec. 15, 2013, w sekcji "Paper Highlight". FDA Express jest to newsletter o tematyce rachunku różniczkowego niecałkowitego rzędu, więcej informacji na stronie <http://em.hhu.edu.cn/fda/index.htm>. Co więcej, na konferencji FDA'2014 był prezentowany artykuł [I], w którym eksperyment, przedstawiony w [III] został odtworzony przez jego autorów. Osiągnięte wyniki okazały się więc interesujące dla środowiska naukowego. Pozwalają one na lepsze zrozumienie samego rachunku różniczkowego niecałkowitego rzędu, gdyż dzięki odpowiedniemu opisowi, można proces nagrzewania traktować jako interpretację fizyczną pochodnej niecałkowitego rzędu. Jest to szczególnie ważne, gdyż nawet interpretacja geometryczna pochodnej niecałkowitego rzędu, dana np. w [11], nie jest intuicyjna. W przyszłości wyniki te umożliwią dokładniejsze modelowanie układów z transportem ciepła, co może zostać wykorzystane przy projektowaniu regulatorów dla takich układów.

Kolejnym osiągnięciem przedstawionych prac było modelowanie ultrakondensatorów z użyciem

rachunku różniczkowego niecałkowitego rzędu. W celu przeprowadzenia badań ultrakondensatorów o większych pojemnościach konieczne było zaprojektowanie i wykonanie specjalnego układu energoelektronicznego, który zaprojektowałem i wykonałem razem z doktorantem Grzegorzem Sarwasem. Badania eksperymentalne potwierdziły wysoką dokładność modelu opartego na rachunku różniczkowym niecałkowitego rzędu. Dokładny model umożliwił mi podanie analitycznego opisu ekwiwalentu pojemności, czyli zmiany (utruty) pojemności równoważnego tradycyjnego kondensatora w zależności od częstotliwości. Opis ten może okazać się bardzo pomocny przy projektowaniu układów energoelektronicznych zawierających ultrakondensatory. Dokładny model został także użyty do określenia częstotliwości rezonansowej układu RLC z ultrakondensatorem [15], która jest bardzo zbliżona do rzeczywistej i różni się blisko o rząd wielkości od tej określonej zakładając model całkowitego rzędu.

Osiągnięciem z zakresu estymacji było podanie przeze mnie ulepszonego algorytmu ułamkowego filtru Kalmana, którego wyprowadzenie wymagało znacznie mniej wymagających założeń. Dzięki temu otrzymałem bardziej dokładne wyniki estymacji i wygładzania (smoothingu). Ponadto ten algorytm został uogólniony dla przypadku danych pomiarowych dostępnych poprzez sieć transmisyjną. Przesyłanie danych poprzez taką sieć wprowadza utratę danych (utrata pakietów), co wymagało dalszych modyfikacji algorytmu estymacji. Otrzymane wyniki potwierdziły efektywność zaproponowanych algorytmów i mogą być one w przyszłości używane do estymacji nieznanymi zmiennymi stanu układów niecałkowitego rzędu zarówno przy pomiarach dokonywanych bezpośrednio, jak i poprzez sieć transmisyjną stratną. Kolejnym osiągnięciem z zakresu estymacji było podanie przeze mnie algorytmów estymacji dla przypadku obecności w układzie szumów niecałkowitego rzędu. Inspiracją dla tych prac były artykuły [3], w których autorzy z dużą efektywnością stosowali algorytm Ułamkowego Filtru Kalmana do danych eksperymentalnych, jednakże bez podania motywacji do jego użycia. Estymacja układów z szumami niecałkowitego rzędu (o korelacji dynamicznej niecałkowitego rzędu) jest właśnie tym przypadkiem, który może wyjaśniać wyniki osiągnięte przez tych autorów. Bardzo dobrym przykładem szumu niecałkowitego rzędu jest szum temperaturowy. Szum ten, wywołany np. zewnętrznym nieskorelowanym szumem strumienia ciepłego (ze względu na zależność pomiędzy strumieniem ciepłym a temperaturą będącą dynamiką niecałkowitego rzędu), jest szumem o korelacji dynamicznej niecałkowitego rzędu. Ze względu na bardzo częste występowanie szumu temperaturowego w aplikacjach praktycznych (szczególnie w elementach elektronicznych) zaproponowany algorytm może znaleźć wiele zastosowań aplikacyjnych także dla układów całkowitego rzędu z szumami niecałkowitego rzędu.

## Literatura

- [1] R. Caponetto, F. Sapuppo, and V. Tomasello. Modelling thermal system via fractional order system. In *International Conference on Fractional Differentiation and Its Applications (ICFDA'14)*, Catania, Italy, Jul 2014.
- [2] A. A. Kilbas, M. Saigo, and R. K. Saxena. Generalized mittag-leffler function and generalized fractional calculus operators. In *Integral Transform and Special Functions*, volume 15, pages 31–49, February 2004.
- [3] M. Kirkko-Jaakkola, J. Collin, and J. Takala. Bias prediction for mems gyroscopes. *Sensors Journal, IEEE*, 12(6):2157–2163, June 2012.
- [4] R. L. Magin. *Fractional calculus in bioengineering*. Begell House, Inc., 2004.

- [5] Richard L. Magin. Fractional calculus models of complex dynamics in biological tissues. *Computers & Mathematics with Applications*, 59(5):1586 – 1593, 2010. Fractional Differentiation and Its Applications.
- [6] K. S. Miller and B. Ross. *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*. John Wiley & Sons Inc., New York, 1993.
- [7] C. A. Monje, Y-Q Chen, B. M. Vinagre, D. Xue, and V. Feliu. *Fractional-order systems and controls*. Springer, 2010.
- [8] K. B. Oldham and J. Spanier. *The fractional calculus*. Academic Press, 1974.
- [9] P. Ostalczyk. *Epitome of the Fractional Calculus: Theory and Its Applications in Automatics*. Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, Łódź, Poland, 2008. (in Polish).
- [10] I. Podlubny. *Fractional differential equations*. Academic Press, 1999.
- [11] I. Podlubny. Geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, vol. 5, no. 4, s. 367–386, 2002.
- [12] J. J. Quintana, A. Ramos, and I. Nuez. Identification of the fractional impedance of ultracapacitors. In *Proceedings of the 2nd IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Applications*, Porto, Portugal, 2006. IFAC FDA'06, 19-21 July.
- [13] S. G. Samko, A. A. Kilbas, and O. I. Marichev. *Fractional integrals and derivatives. Theory and Applications*. Nauka i Tekhnika, Minsk, 1987.
- [14] D. Sierociuk and A. Dzieliński. Fractional kalman filter algorithm for the states, parameters and order of fractional system estimation. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, vol. 16, no. 1, pp. 129-140, 2006.
- [15] D. Sierociuk, G. Sarwas, and M. Twardy. Resonance phenomena in circuits with ultracapacitors. In *Environment and Electrical Engineering (EEEIC), 2013 12th International Conference on*, pages 197–202, May 2013.
- [16] B. M. Vinagre, V. Feliú, and J. J. Feliú. Frequency domain identification of a flexible structure with piezoelectric actuators using irrational transfer function models. In *Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 1278–1280, Tampa, Florida, USA, Dec 1998.
- [17] S. Westerlund and L. Ekstam. Capacitor theory. *IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation*, 1, 1994.

